

株価の残差リターンに注目した深層学習ポートフォリオ最適化

Deep Portfolio Optimization of Residual Factors in the Stock Market

今城 健太郎^{1*} 南 賢太郎¹ 伊藤 克哉¹ 中川 慧²
Kentaro Imajo, Kentaro Minami, Katsuya Ito, Kei Nakagawa

¹ 株式会社 Preferred Networks

¹ Preferred Networks, Inc.

² 野村アセットマネジメント株式会社

² Nomura Asset Management Co., Ltd.

Abstract: Recent developments in deep learning techniques have motivated intensive research in machine learning-aided stock trading strategies. However, since the financial market has a highly non-stationary nature hindering the application of typical data-hungry machine learning methods, leveraging financial inductive biases is important to ensure better sample efficiency and robustness. In this study, we propose a novel method of constructing a portfolio based on predicting the distribution of a financial quantity called residual factors, which is known to be generally useful for hedging the risk exposure to common market factors. The key technical ingredients are twofold. First, we introduce a computationally efficient extraction method for the residual information, which can be easily combined with various prediction algorithms. Second, we propose a novel neural network architecture that allows us to incorporate widely acknowledged financial inductive biases such as amplitude invariance and time-scale invariance. We demonstrate the efficacy of our method on U.S. and Japanese stock market data. Through ablation experiments, we also verify that each individual technique contributes to improving the performance of trading strategies. We anticipate our techniques may have wide applications in various financial problems.

1 はじめに

定量的な取引戦略の開発は金融分野における中心的課題である。近年の機械学習技術の発展に伴い、機械学習技術に基づく取引戦略の開発が注目されている [1, 2, 3]。一方、金融時系列の予測は一般には非常に難しい問題であると考えられている [4]。特に、金融市場のダイナミクスは非常に短い期間で敵対的に変動するということが指摘されており (例えば効率市場仮説 [5])、多くの機械学習手法の動作条件となる、定常かつ十分なサンプルサイズを伴ったデータを得ることは困難である。

一般に、データ効率のよい機械学習手法を開発するためには、データに特有の帰納バイアスを考慮したモデルを利用することが有効である。そこで、本研究では、金融分野における既存研究によって報告されている、金融時系列に関する以下の3つの性質に着目する。

1. 市場の共通因子に対するヘッジ: 金融分野におい

*連絡先: 東京都千代田区大手町 1-6-1 大手町ビル
E-mail: imos@preferred.jp

ては、株式投資のリターンの挙動は因子モデルによって説明されることが多い [6]。因子モデルによれば、特定の株式のリターンは、市場全体の指数などに連動する共通因子と、その銘柄特有の挙動をあらゆる残差因子に分解される。取引戦略の構築においては、モメンタム効果などに基づく古典的な戦略は共通因子と高い相関をもち、経済危機など市場全体がもつリスクに晒されることが指摘されている [7]。一方、残差因子に基づく取引戦略を構築することで、共通因子の影響を削減しつつ正のリターンが得られうることが報告されている [7, 8]。

2. 分布仮定に基づくポートフォリオ構築: ポートフォリオの「良さ」を評価するために、与えられたリスク回避度のもとでリターンを最大化するという規準を考える。ポートフォリオ理論では、リターンの分布の性質に基づいて最適ポートフォリオを構築するための枠組みが与えられている [9]。特に、将来リターンの平均および分散の予測が与

えられれば、それに基づいたポートフォリオを客観的に構築することが可能である。

3. **金融時系列におけるスケール不変性:** 金融時系列は、ボラティリティ・クラスタリング [10] やフラクタル性 [11] といった性質を持つことが指摘されている。これらは、それぞれ時系列データの振幅および時間スケールに対するある種の不変性として解釈することができる。

本論文では、ニューラルネットワークによる残差因子の分布予測に基づいてポートフォリオを構築する手法を提案する。提案手法のアイデアは次の通りである。上記1の性質から、リターンの残差因子の情報を利用することで、市場の共通因子に対して相関の低いポートフォリオが構築できることが期待される。また、上記2の性質から、分布予測を経由したポートフォリオ構築の枠組みを考えることで、ある種の最適性をもったポートフォリオを客観的に構築することが可能である。さらに、分布予測においては、上記3の性質を考慮したネットワーク構造を提案することで、効率的な学習をめざす。また、本論文では、日本の株式市場データを用いた実証分析によって、様々なベースラインの手法に対する提案手法の有効性を示す¹。

2 問題設定

過去の株価の観測に基づいてポートフォリオを構築する問題を考える。\$S\$ 個の銘柄に対応する株価

$$\mathbf{p}^{(i)} = \{p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_t^{(i)}, \dots\}$$

が観測できるとする。ただし、\$p_t^{(i)}\$ は銘柄 \$i\$ の時刻 \$t\$ における価格である。また、銘柄 \$i\$ の時刻 \$t\$ におけるリターンを

$$r_t^{(i)} = \frac{p_{t+1}^{(i)}}{p_t^{(i)}} - 1$$

と定義する。以下本論文では、株価そのものではなく、リターンの性質について考察する。

ポートフォリオとは、\$S\$ 個の銘柄に対する(時間依存する)重みベクトル \$\mathbf{b}_t = (b_t^{(1)}, \dots, b_t^{(i)}, \dots, b_t^{(S)})\$ のこととする。ただし、\$b_t^{(i)}\$ は銘柄 \$i\$ に対する投資比率を表し、\$\sum_{i=1}^S |b_t^{(i)}| = 1\$ を満たすものとする。ポートフォリオ \$\mathbf{b}_t\$ が与えられたとき、時刻 \$t\$ におけるポートフォリオのリターンを

$$R_t = \sum_{i=1}^S b_t^{(i)} r_t^{(i)}$$

とする。本論文で考察する問題は、過去の時刻におけるリターンの観測に基づいてポートフォリオ \$\mathbf{b}_t\$ の値を決定し、\$R_t\$ を最大化することとして定式化される。また、本論文では正味の投資金額がゼロであるという \$\sum_{i=1}^S b_t^{(i)} = 0\$ を満たすゼロ金額投資ポートフォリオのパフォーマンスを用いて評価を行う。

3 提案手法

本節では提案システムの概要について説明する。図1に提案システムの概要を示す。提案システムでは、まず (i) スペクトラル残差によって残差因子の情報を抽出し (3.1 節)、次に (ii) ニューラルネットワークによる残差因子の分布予測を行い (3.2 節)、最後に (iii) 分布情報に基づいた最適ポートフォリオの構築を行う (3.4 節)。また、(ii) の分布予測においては、金融時系列特有の構造を考慮したネットワーク構造を提案する。これについては3.3 節で解説する。

3.1 残差因子の抽出

本論文では、株式のリターンの残差因子に基づく取引戦略を開発する。冒頭で説明したように、残差因子は複数銘柄間で共有される要因をヘッジした残りの情報に基づいた因子であるため、市場がもつリスクに対してロバストなポートフォリオを構築できることが期待される。

以下では、観測データから残差因子を抽出する方法を簡単に説明する。時刻 \$t\$ における株 \$S\$ のリターンを

$$\mathbf{r}_t = (r_t^{(1)}, \dots, r_t^{(S)})^\top$$

とする。リターンの挙動を説明するモデルとして、因子モデル

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{B} \mathbf{f}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t \quad (1)$$

を考える。ただし、\$\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^K\$ は \$K\$ 個の共通因子を表すベクトル、\$\mathbf{B}\$ は \$S \times K\$ 行列、\$\boldsymbol{\epsilon}_t\$ は残差因子を表す。我々の目的は、リターン \$\mathbf{r}_t\$ の観測に基づいて残差因子 \$\boldsymbol{\epsilon}_t\$ を復元することである。

残差因子の抽出に関する既存手法について簡単に触れておく。(1) は動的因子モデルと呼ばれることがあり [13]、共通因子 \$\mathbf{f}_t\$ や残差因子 \$\boldsymbol{\epsilon}_t\$ の分布に関する様々な仮定のもとで因子分解の手法が複数提案されている。多くの場合、このような分解は因子分析 (FA) や主成分分析 (PCA) と類似のスペクトル分解法に対して時刻 \$t\$ に関する相関構造を考慮した拡張を行うことで得られる。しかし本論文では、時系列の相関構造の複雑なモデル化を避け、単純化したスペクトル分解に基づく抽出手法について考察する。

¹本稿は [12] の要約であり、詳細は <https://arxiv.org/abs/2012.07245> を参照。

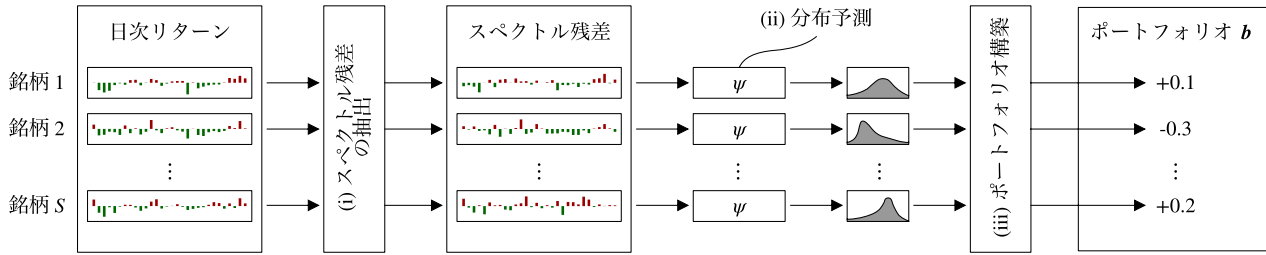


図 1: 提案システムの概要. 提案システムは (i) 残差因子の抽出 (ii) ニューラルネットワークに基づく残差因子の分布予測 (iii) ポートフォリオ理論に基づく最適ポートフォリオの構築の 3つの機能からなる.

$H > 1$ を窓幅として, 行列

$$\mathbf{X}_t = [\mathbf{r}_{t-H}, \dots, \mathbf{r}_{t-1}] = \begin{bmatrix} r_{t-H}^{(1)} & \cdots & r_{t-1}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{t-H}^{(S)} & \cdots & r_{t-1}^{(S)} \end{bmatrix}$$

を定義する. また, $\tilde{\mathbf{X}}_t$ を行ごとの平均を引いて中心化した行列とする. $C (< S)$ 共通因子の数に相当するパラメータとする. 以上のもとで, スペクトル残差 (spectral residual) を以下のように定義する. まず, $\tilde{\mathbf{X}}_t$ の特異値分解を

$$\tilde{\mathbf{X}}_t = \mathbf{V}_t \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_S) \mathbf{U}_t$$

とする. ただし, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_S$ は降順に並べた特異値である. このとき, スペクトル残差を小さい方から数えた $S-C$ 主成分とする. すなわち, 時刻 $t-H \leq s \leq t-1$ に対して, 残差因子ベクトルを

$$\tilde{\epsilon}_s = \mathbf{A}_t \mathbf{r}_s \quad (2)$$

と定義する. ただし,

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{V}_t \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_C, \underbrace{1, \dots, 1}_{S-C}) \mathbf{V}_t^\top$$

は「残差空間」への射影行列である. この定義は, 直感的には, 時間について局所的には $\tilde{\mathbf{X}}_t$ の C 個の主成分で張られる空間に共通因子に関する情報が多く含まれ, 残りの成分であるスペクトル残差には残差因子に関する情報が多く含まれることを期待したものである.

3.2 残差因子の分布予測

次に, 過去の残差因子の系列 $\tilde{\epsilon}_{i,t-H}, \dots, \tilde{\epsilon}_{i,t-1}$ が抽出されたもとで, 次の時刻における $\tilde{\epsilon}_{i,t}$ の分布を予測する問題を考える. ここでは, 分位点回帰 [14] を利用した手法について説明する. 分位点回帰は, 条件付き分位点を推定するために広く利用されている手法である. 直感的には, 未来の時刻における残差因子 $\tilde{\epsilon}_{i,t}$ に

対して, 十分多い数の分位点を予測することができれば, 分布に関する様々な情報を復元することが可能である.

まず, 与えられた $\alpha \in (0, 1)$ に対して, 条件つき α -分位点を予測する方法について述べる. 簡単のため $y_t = \tilde{\epsilon}_{i,t}$ および $\mathbf{x}_t = (\tilde{\epsilon}_{i,t-H}, \dots, \tilde{\epsilon}_{i,t-1})$ と表す. y_t の条件つき分位点を予測する関数 $\psi_\alpha: \mathbb{R}^H \rightarrow \mathbb{R}$ は, 次の損失関数の最小化によって得られる:

$$\mathbb{E}_{y_t, \mathbf{x}_t} [\ell_\alpha(y_t, \psi_\alpha(\mathbf{x}_t))].$$

ただし $\ell_\alpha(y, y')$ は

$$\ell_\alpha(y, y') = \max\{(\alpha - 1)(y - y'), \alpha(y - y')\}$$

によって定義される pinball loss である. 次に, $\alpha_j = j/Q$ ($j = 1, \dots, Q-1$) を与えられたグリッドとして, α_j -分位点を同時に予測したい. そこで, 関数 $\psi: \mathbb{R}^H \rightarrow \mathbb{R}^{Q-1}$ を, 以下の目的関数を最小化するように訓練する

$$\mathcal{L}_Q(y_t, \psi(\mathbf{x}_t)) = \sum_{j=1}^{Q-1} \ell_{\alpha_j}(y_t, \psi_j(\mathbf{x}_t)).$$

上記の方法によって $Q-1$ 個の条件付き分位点 $\tilde{y}_t^{(j)} = \psi_j(\mathbf{x}_t)$ ($j = 1, \dots, Q-1$) が得られたもとでは, y_t の分布に関する情報を以下のように推定することができる. たとえば, 平均は

$$\hat{\mu}_t = \hat{\mu}(\tilde{\mathbf{y}}_t) = \frac{1}{Q-1} \sum_{j=1}^{Q-1} \tilde{y}_t^{(j)} \quad (3)$$

によって推定できる. また, 分散は, 分位点の不偏分散

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_t &= \hat{\sigma}(\tilde{\mathbf{y}}_t) \\ &= \text{Variance}(\tilde{\mathbf{y}}_t) \\ &= \frac{1}{Q-1} \sum (\tilde{y}_t^{(j)} - \hat{\mu}_t)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

や, ロバストな推定量 (Median Absolute Deviation など) によって推定することができる.

3.3 金融時系列を考慮したネットワーク構造

分位点の予測器 $\psi: \mathbb{R}^H \rightarrow \mathbb{R}^{Q-1}$ として、ニューラルネットワークに基づくモデルを利用することを考える。本論文では、金融時系列について知られている2つの不変性を考慮したネットワーク構造を導入する。

3.3.1 ボラティリティ不変性

まず、振幅に関する不変性について考察する。金融時系列においてはボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる性質があり、リターンの変動の後には同程度の大きさの変動が追従しやすいということが知られている [15]。このため、ある信号が金融時系列として観測されるならば、正の定数倍をして得られる信号も金融時系列として尤もらしいものになると考えられる。

この不変性を効率的に利用するために、予測器が positive homogeneous であるという制約を導入する。ただし、関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が positive homogeneous であるとは、任意の入力 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ と正の定数 $a > 0$ に対して $f(a\mathbf{x}) = af(\mathbf{x})$ となることをいう。一般に、positive homogeneous な関数は以下のような正規化によって構成できる。 $\tilde{\psi}: S^{H-1} \rightarrow \mathbb{R}^{Q-1}$ を球面 $S^{H-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^H : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ 上の任意の関数とするととき、

$$\psi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| \tilde{\psi}\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right)$$

によって定義される関数は positive homogeneous になる。よって、この正規化によって、球面上の関数を表現する任意のモデルを、振幅に関する不変性をもつモデルに変換することができる。

3.3.2 フラクタル性

次に時間スケール不変性について考える。株価の時系列にはフラクタル構造があることが知られている [11]。ここで、フラクタル構造とは特徴的な時間スケールがないことであり、ある時系列を異なるサンプリングレートで観測した場合にそれぞれの形状を区別することができないことを意味する。

本論文では、予測問題においてフラクタル構造を活用するために、フラクタルネットワークと呼ばれるネットワーク構造を提案する。図2にフラクタルネットワークの構造を示す。提案手法の基本的なアイデアは、複数の異なるサンプリングレートのもとで観測した信号に対して同一の操作を適用することで、時間スケール不変性を考慮した予測を行うというものである。提案手法は、(a) リサンプリング機構および (b) 2つのニューラルネットワーク ψ_1, ψ_2 からなる。リサンプリング機構 $\text{Resample}(\mathbf{x}, \tau)$ では、与えられたサンプリング

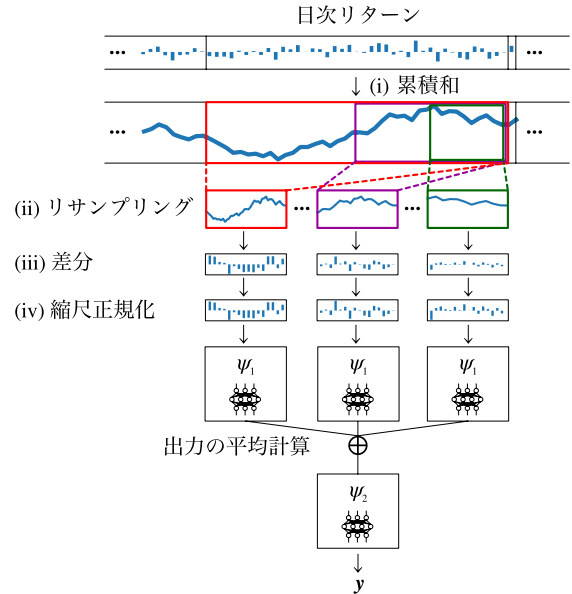


図2: フラクタルネットワークにおける処理。

レート τ に対応する系列をサンプリングと正規化によって生成する (図2の (i)–(iv))。まず、与えられたサンプリングレートの列 $\tau_1 < \dots < \tau_L (= 1)$ に対して $\text{Resample}(\mathbf{x}, \tau_i)$ を適用し、 L 個の系列を生成する。次に、 L 個の系列それぞれに対して共通の変換 ψ_1 を適用する。最後に、これらの系列の平均をとることによって情報を集約し、変換 ψ_2 を適用した結果を出力する。以上を数式としてまとめると、フラクタルネットワークの処理は以下のように表せる

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi_2\left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \psi_1(\text{Resample}(\mathbf{x}, \tau_i))\right). \quad (5)$$

3.4 ポートフォリオ構築

ここでは、分布予測の結果に基づいて最適なポートフォリオを構築する方法について説明する。期待リターンと共分散行列の推定値をそれぞれ $\hat{\boldsymbol{\mu}}_t$ と $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t$ とする。このとき、 $\lambda > 0$ をリスク回避度として、最適なポートフォリオは

$$\hat{\mathbf{b}}_t = \frac{1}{\lambda} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_t^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_t$$

と書ける [16]。

今回は、残差リターンの各成分はほぼ無相関であるという仮定に基づき、共分散行列は対角行列によって近似するものとする。すると、 j 番目の残差リターンのウェイトは

$$\hat{b}_j^{\text{res}} = \frac{\hat{\mu}_{t,j}}{\lambda \hat{\sigma}_{t,j}}$$

によって与えられる。ただし、 $\hat{\mu}_{t,j}$ は式 (3)、および $\hat{\Sigma}_t$ は式 (4) によって与えられる平均および分散の推定値である。このように得られた残差リターンに対応するポートフォリオ \mathbf{b}^{res} を元の株式に対するポートフォリオ \mathbf{b} に変換するためには、関係式 (2) に基づいて

$$\mathbf{b}_t = \mathbf{A}_t^\top \mathbf{b}_t^{\text{res}}$$

とすればよい。さらに、ゼロ金額投資ポートフォリオに変換するには、ポートフォリオの平均

$$\bar{b}_t = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S b_{t,i}$$

を各ウェイトから引き、ウェイトの合計が 1 となるように正規化すればよい。

4 数値実験

アメリカ株式市場のデータとして、S&P 500 指数構成銘柄を使用した実証分析を行った。2000 年 1 月から 2007 年 12 月までをトレーニング期間として用い、2008 年 1 月から 2020 年 4 月までをテスト期間として使用した。ベースラインの手法として、単純バイアンドホールド (Market), AR(1) モデル, リッジ回帰 (Linear), ニューラルネットワーク (MLP), State Frequency Memory RNNs を元にした株価予測の最先端モデル (SFM) を用いた。

また、提案手法 (DPO) の各要素の寄与を調べるため以下の切除モデルとの比較も行った。

- DPO-NQ … 提案手法の分布予測モデルを用いずに平均を L_2 誤差最小化によって求めたモデル。
- DPO-NF … 提案手法のフラクタルネットワークを多層パーセプトロンに置き換えたモデル。
- DPO-NV … 提案手法のボラティリティ不変性のための正規化を行わないモデル。

評価指標としては、各手法を用いて構築されたポートフォリオのトータルリターン (CW), 年率リターン (AR), リスクを表す標準偏差 (AVOL), リスク一単位あたりのリターンを表す Sharpe レシオ ($\text{ASR} := \text{AR}/\text{AVOL}$), ポートフォリオの全期間での最大の下落幅を表す最大ドローダウン (MDD) を用いた。

表 1 が評価指標のサマリーである。提案手法が AR を除くすべての評価指標においてベースラインを上回っている。図 3 が CW の推移を各手法で比較したものである。CW もベースラインを安定的に上回り、かつ全期間を通じて右上がりの推移となっていることから、提案手法の有効性が確認できる。

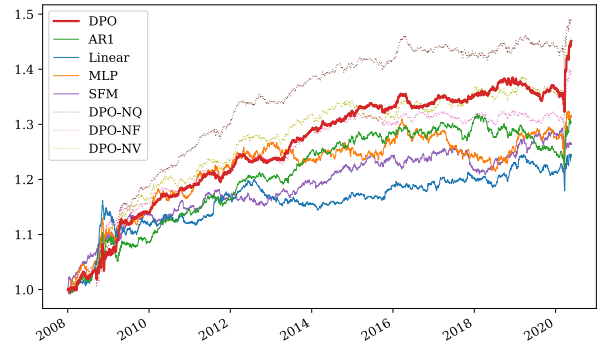


図 3: アメリカ株式市場における各手法の CW の推移

表 1: アメリカ株式市場における性能評価

Method	ASR	AR[%]	AVOL[%]	MDD[%]
Market	+0.607	+0.130	0.215	0.496
AR(1)	+0.858	+0.021	0.025	0.072
Linear	+0.724	+0.017	0.024	0.059
MLP	+0.728	+0.022	0.030	0.077
SFM	+0.709	+0.019	0.026	0.058
DPO-NQ	+1.237	+0.032	0.026	0.063
DPO-NF	+1.284	+0.027	0.021	0.042
DPO-NV	+1.154	+0.030	0.026	0.053
DPO (Proposed)	+1.393	+0.030	0.021	0.045

また、日本株式市場のデータに対しても同様の実験を行った。日本株式市場のデータとしては、TOPIX 500 指数構成銘柄を使用し実証分析を行った。2005 年 1 月から 2012 年 12 月までをトレーニング期間とし、2013 年 1 月から 2018 年 12 月までをテスト期間として使用した。表 2 の通り提案手法が AR を除くすべての評価指標においてベースラインを上回る同様の結果が得られた。図 4 が CW の推移を各手法で比較したものである。CW もベースラインを安定的に上回り、かつ全期間を通じて右上がりの推移となっていることから、提案手法の有効性が確認できる。

表 2: 日本株式市場における性能評価

Method	ASR	AR[%]	AVOL[%]	MDD[%]
Market	+0.819	+0.158	0.193	0.248
AR(1)	+1.835	+0.034	0.019	0.031
Linear	+1.380	+0.023	0.017	0.024
MLP	+1.802	+0.030	0.017	0.032
SFM	+0.250	+0.005	0.019	0.042
DPO-NQ	+1.369	+0.024	0.018	0.032
DPO-NF	+1.770	+0.030	0.017	0.025
DPO-NV	+1.979	+0.039	0.020	0.026
DPO	+2.171	+0.036	0.017	0.025

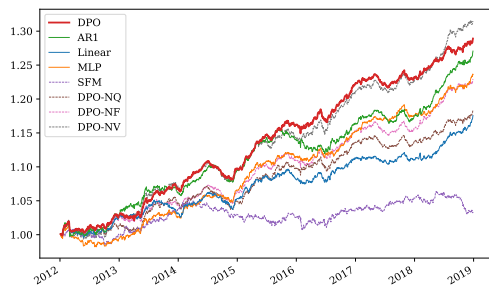


図 4: 日本株式市場における各手法の CW の推移

5 結論

本論文では、残差因子の分布予測に基づく新しいポートフォリオ構築手法を提案した。提案手法では、単純なスペクトル分解法によって残差因子の情報を抽出し(スペクトル残差)、金融時系列の不変性を考慮した新しいネットワーク構造を利用して分布予測を行う。日本株式市場を対象とした実証分析から、提案手法が一定の有効性をもつことが確認された。

参考文献

- [1] Jingyuan Wang, Yang Zhang, Ke Tang, Junjie Wu, and Zhang Xiong. Alphastock: A buying-winners-and-selling-losers investment strategy using interpretable deep reinforcement attention networks. In *Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining*, pp. 1900–1908, 2019.
- [2] Rohit Choudhry and Kumkum Garg. A hybrid machine learning system for stock market forecasting. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, Vol. 39, No. 3, pp. 315–318, 2008.
- [3] Vatsal H Shah. Machine learning techniques for stock prediction. *Foundations of Machine Learning — Spring*, Vol. 1, No. 1, pp. 6–12, 2007.
- [4] Christopher Krauss, Xuan Anh Do, and Nicolas Huck. Deep neural networks, gradient-boosted trees, random forests: Statistical arbitrage on the s&p 500. *European Journal of Operational Research*, Vol. 259, No. 2, pp. 689–702, 2017.
- [5] Burton G Malkiel and Eugene F Fama. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The journal of Finance*, Vol. 25, No. 2, pp. 383–417, 1970.
- [6] Eugene F. Fama. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The Journal of Finance*, Vol. 25, No. 2, p. 383, May 1970.
- [7] David Blitz, Joop Huij, and Martin Martens. Residual momentum. *Journal of Empirical Finance*, Vol. 18, No. 3, pp. 506–521, 2011.
- [8] David Blitz, Joop Huij, Simon Lansdorp, and Marno Verbeek. Short-term residual reversal. *Journal of Financial Markets*, Vol. 16, No. 3, pp. 477–504, 2013.
- [9] Harry Markowitz. Portfolio selection. *The journal of finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77–91, 1952.
- [10] Thomas Lux and Michele Marchesi. Volatility clustering in financial markets: a microsimulation of interacting agents. *International journal of theoretical and applied finance*, Vol. 3, No. 04, pp. 675–702, 2000.
- [11] Edgar E Peters. *Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics*, Vol. 24. John Wiley & Sons, 1994.
- [12] Kentaro Imajo, Kentaro Minami, Katsuya Ito, and Kei Nakagawa. Deep portfolio optimization via distributional prediction of residual factors. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence (to be appear)*, 2021.
- [13] James H. Stock and Mark W. Watson. *Dynamic Factor Models*. Oxford University Press, Jul 2011.
- [14] Roger Koenker. *Quantile Regression*. Econometric Society Monographs. Cambridge University Press, 2005.
- [15] Benoit B Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. In *Fractals and scaling in finance*, pp. 371–418. Springer, 1997.
- [16] Raymond Kan and Guofu Zhou. Optimal portfolio choice with parameter uncertainty. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 42, No. 3, pp. 621–656, 2007.