

シュレーディンガー・リスクパリティポートフォリオ

Schrödinger Risk Parity Portfolio

内山 祐介^{1*} 中川 慧²
Yusuke Uchiyama¹ Kei Nakagawa²

¹ 株式会社 MAZIN

¹ MAZIN Inc.

² 野村アセットマネジメント株式会社

² Nomura Asset Management Co, Ltd.

Abstract: 複数資産からなるポートフォリオのアセット・アロケーションの問題において、期待リターンとリスクのトレードオフを考慮した平均分散法が使用されてきた。しかし、期待リターンの推定は困難であり、アウトオブサンプルのパフォーマンスが優れないことなどから、リスクのみに焦点を当てたリスクベースのポートフォリオ構築手法が複数提案されており、実務を中心に注目されている。加えて、ポートフォリオを構成する資産変動同士は背後に共通するファクターを持つと考えられ、これらの情報を抽出するために次元削減の手法である主成分分析が応用されている。本研究では、量子力学にあらわれるシュレーディンガー方程式を応用したシュレーディンガー主成分分析を用いたリスク分散ポートフォリオとして、シュレーディンガー・リスクパリティポートフォリオを提案する。これによりサンプル点が不等間隔や少数のケースであっても主成分と相互相関が精度良く推定でき、効率的なリスク分散が可能になると考えられる。提案手法を既存のリスク分散ポートフォリオと比較し、有効性と課題を検証する。

1 はじめに

複数資産からなるポートフォリオのアセット・アロケーションの問題において、期待リターンとリスクのトレードオフを考慮した平均分散法が使用されてきた。Markowitz[1]により提案されて以来長らく、平均分散法は投資意思決定において極めて重要なフレームワークである。その理由として、平均分散法は最適化問題が性質の良い二次計画問題として表すことができることから、実務上扱いやすいだけでなく、期待効用最大化原理と整合的であるため、経済的な正当性が得られることが挙げられる。平均分散法は期待リターン、分散および資産間の相関をそれぞれ推計し、それらをインプットとして与え、様々な投資制約のもとでポートフォリオの平均と分散のトレードオフを考慮し資産配分を決定する手法である。しかしながら、平均分散法にはいくつかの実務上の課題がある。最もよく指摘される点は、そもそもインプットとなる期待リターンの正確な値を予測することが非常に困難であり[2]、アウトオブサンプルのパフォーマンスが非常に悪いという点である[3]。リーマンショックや直近のコロナショック等を例に、市場の

不確実性は年々高まっており、このような市場環境下で期待収益率の推定はより困難になっていると考えられる。さらに期待リターンの小さな変化に対して、最適化の結果として得られる最適なポートフォリオが大きく異なってしまうという点も課題として挙げられる[4]。

そこで、期待リターンを用いずにリスクのみに焦点を当てたリスクベースのポートフォリオ構築手法が複数提案されており、実務を中心に注目されている。このようなリスクベース・ポートフォリオ構築手法として、最小分散ポートフォリオ[5]、リスクパリティ・ポートフォリオ[6, 7]、最大分散度ポートフォリオ[8]などが代表的なものとして提案されており、さらにそれぞれを発展させたリスクベースポートフォリオ[9, 10, 11]が提案されている。実際に、株式ポートフォリオや資産配分を対象とした様々な実証分析やバックテストにおいて、これらのリスクベースのポートフォリオ構築手法は平均分散ポートフォリオや時価総額加重型のポートフォリオと比較して良好なパフォーマンスを示している[12]。

一方で、ポートフォリオを構成する資産変動同士は背後に共通するファクターを持つと考えられており、これらの情報を抽出するために次元削減の手法である主成分分析が応用されている。これらは資産ベースでのリスクを均等に配分する通常のリスクパリティポートフォリオに対して、リスクの源泉であるファクターについての

*連絡先：株式会社 MAZIN
〒111-0035 東京都台東区西浅草 3 丁目 29-14
E-mail: uchiyama@mazin.tech

リスクを均等に配分するため、リスク分散ポートフォリオとも呼ばれている。また、資産ベースではなくファクターベースでのリスクベースのポートフォリオ構築手法として、主成分分析によって抽出されたファクターに対してリスクを均等に配分する主成分リスクパリティポートフォリオ [13] が提案されている。さらに、動的なリスクファクターを抽出することを目的に、ヒルベルト主成分分析により抽出したファクターに対して均等にリスクを配分する複素主成分リスクパリティポートフォリオが提案され [10], これをさらに発展させた四元数リスクパリティポートフォリオも提案されている [14].

本研究では、量子力学にあらわれるシュレーディンガー方程式を応用した、シュレーディンガー主成分分析 [15] を用いたリスク分散ポートフォリオとして、シュレーディンガー・リスクパリティポートフォリオを提案する。シュレーディンガー主成分分析によりサンプル点が不等間隔や少数のケースであっても主成分と相互相関が精度良く推定でき、効率的なリスク分散が可能になると考えられる。提案手法を既存のリスク分散ポートフォリオと比較し、有効性と課題を検証する。

2 提案手法

2.1 ガウス場とシュレーディンガー方程式

空間座標 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ に対してスカラー場 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられているとする。任意の N 個の座標ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ に対応する場の量 $\phi(\mathbf{x}_1), \phi(\mathbf{x}_2), \dots, \phi(\mathbf{x}_N)$ が N 次元ガウス分布に従う確率変数であるとき、 $\phi(\cdot)$ をガウス過程という。特に、 $\phi(\cdot)$ は空間座標 \mathbf{x} に対する場の量であることから、ガウス場とも呼ばれる。ガウス場から平均値 $\mathbb{E}[\phi(\mathbf{x})]$ を引くことにより、一般性を損なうことなく、 $\mathbb{E}[\phi(\mathbf{x})] = 0$ とすることが可能である。このとき、

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbb{E}[\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}')] \quad (1)$$

で与えられる正定値対称関数を共分散関数またはカーネル関数という。したがって、任意の N 個の座標ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ に対してはカーネル関数によって N 次元ガウス分布の共分散行列

$$K = \begin{bmatrix} k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \dots & k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N) \\ k(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & k(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) & \dots & k(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_1) & k(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_2) & \dots & k(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \quad (2)$$

が与えられる。ガウス場の共分散関数に対しては、

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sqrt{A(\mathbf{x})A(\mathbf{x}')} \times \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] \quad (3)$$

をみたく実関数 $A(\cdot)$ と正定値対称行列 Σ が存在する。

一方、カーネル関数を積分核に持つ積分作用素に対して、固有方程式

$$\int_{\Omega_{\mathbf{x}}} k(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\varphi_i(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' = \lambda_i\varphi_i(\mathbf{x}') \quad (4)$$

および、直交条件

$$\int_{\Omega_{\mathbf{x}}} \varphi_i(\mathbf{x})\varphi_j(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \delta_{i,j} \quad (5)$$

をみたく固有値 λ_i と固有関数 φ_i が存在する。ここで、 $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタである。カーネル関数の正値対称性から、固有値は正の実数である。固有値と固有関数の添字 i および j は $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$ をみたくする。式 (4) は共分散行列の固有値問題の無限次元ベクトルに対応することから、適当な有限個の固有関数で打ち切られた固有関数展開は主成分分析に対応する。

量子力学におけるシュレーディンガー方程式の固有値問題は以下のように与えられる。

$$-\frac{1}{2}\Delta_{\Sigma_m}\psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}) \quad (6)$$

ここで、 $\psi(\cdot)$ は波動関数であり、 Δ_{Σ_m} は正定値対称行列 Σ_m によって重み付けられた 2 階の偏微分作用素

$$\Delta_{\Sigma_m} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\Sigma_m)_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (7)$$

である。実関数 $V(\cdot)$ はポテンシャル関数であり、 E はエネルギー固有値である。式 (6) の左辺に現れる線形作用素はハミルトン演算子やハミルトニアンともよばれ、

$$H = -\frac{1}{2}\Delta_{\Sigma_m} + V(\mathbf{x}) \quad (8)$$

と表記される。ハミルトニアンの正値対称性から、エネルギー固有値は非負の実数値をとる。

2.2 シュレーディンガー主成分分析

式 (4) における積分方程式と式 (6) で表されるシュレーディンガー方程式は、以下の対応関係

$$\phi(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \psi(\mathbf{x}) \quad (9)$$

$$-A(\mathbf{x}) \Leftrightarrow V(\mathbf{x}) \quad (10)$$

$$A(\mathbf{x})\Sigma \Leftrightarrow \Sigma_m \quad (11)$$

によって2次までの精度で一致する。したがって、もとのガウス場をシュレーディンガー方程式の固有関数で展開した際に適当なところで打ち切ることにより主成分分析を行うことが可能となる。これをシュレーディンガー主成分分析という。通常の主成分分析は有限のデータセットを用いて行われうるため、少数サンプルしか得られない場合の推定精度が悪化することが知られている。一方で、シュレーディンガー主成分分析はデータのサンプル数に依存しないため、2次までの近似精度の範囲内においては安定した推定結果を得ることができる。

2.3 シュレーディンガー・リスクパリティポートフォリオ

シュレーディンガー主成分分析は場の量、すなわち空間座標の各点において変動する量を対象としている。一方で、アセットアロケーションの問題では空間座標には対応付けられない個々の資産価格が変動する系が対象となる。そのため、 i 番目の資産を便宜的に空間座標値 x_i と対応付けることによって、複数資産の価格変動からなる多変量時系列に対してシュレーディンガー主成分分析を適用する。その結果を利用して構成するリスク分散ポートフォリオをシュレーディンガー・リスクパリティポートフォリオとして定式化する。

シュレーディンガー・リスクパリティポートフォリオの構成手順を以下に示す。

1. N 個の資産の T 期分のリターンの系列 $\{r_{t,i}\} (i = 1, 2, \dots, N; t = 1, 2, \dots, T)$ に対して、

$$\mu_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{t,i}, \quad (12)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{t,i} - \mu_{r,i})^2 \quad (13)$$

を求める。

2. ポテンシャル関数の関数形を仮定し、 $V(x_{j(i)}) = \sigma_i^2$ となるような置換 $i \rightarrow j(i)$ を行い、 $x_j = x_0 + j\Delta x$ における x_0 および Δx と、ポテンシャル関数のパラメータを推定する。

3. 空間1次元のシュレーディンガー方程式の固有値問題

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (14)$$

を解くことで、固有値と固有関数の組 $\{E_l, \psi_l\} (l = 1, 2, \dots, L)$ を求める。ここで、 L はシュレーディンガー主成分分析の打ち切り回数に対応する。

4. 固有関数から行列

$$\Psi_{l,i} = \psi_l(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, L) \quad (15)$$

を生成し、ポートフォリオのウェイト w_i ($i = 1, 2, \dots, N$) に対して

$$\tilde{w}_l = \sum_{i=1}^N \Psi_{l,i} w_i \quad (16)$$

を求める。

5. 各 l に対して、固有値 E_l と \tilde{w}_l から

$$v_l = \frac{E_l \tilde{w}_l^2}{\sum_{l=1}^L E_l \tilde{w}_l^2} \quad (17)$$

を求める。

6. エントロピー

$$\mathcal{H} = - \sum_{l=1}^L v_l \exp v_l \quad (18)$$

を、制約条件

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (19)$$

のもとで最大化することで、最適なウェイトを求める。

空間1次元の場合には、適当なポテンシャル関数のもとでのシュレーディンガー方程式は解析解を持つことが知られている。たとえば、ポテンシャル関数が

$$V(x) = -\frac{1}{2} k x^2 \quad (20)$$

で与えられる調和振動子の場合には、 $y = x/\sqrt{k}$, $\lambda = 2E/\sqrt{k}$ とすると2階の常微分方程式

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} + (\lambda - y^2) \psi = 0 \quad (21)$$

が得られる。これを解くと、

$$\lambda_l = 2l + 1, \quad (22)$$

$$\psi_l(y) = H_l(y) e^{-y^2/2} \quad (23)$$

が得られる。ここで、関数 $H_l(\cdot)$ はエルミート多項式

$$H_l(y) = (-1)^l e^{y^2} \frac{d^l}{dy^l} e^{-y^2} \quad (24)$$

である。これにより、求めたい固有値と固有関数が得られる。このほかにも解析解が得られるポテンシャル関数は存在し、問題に応じて適宜使い分ければよい。

3 実証分析

ここでは提案手法を含む複数のポートフォリオのパフォーマンスを比較し、提案手法の有効性を確認する。

3.1 データセット

各ポートフォリオのパフォーマンスを評価するために、表1に示す6つの債券先物、6つの株価指数先物、5つの通貨を対象とするデータを用いる。これらのデータは全てBloomberg 端末より取得した。データのサンプル期間は2000年5月から2017年4月であり、記述統計を表1に示す。

3.2 分析手法

等ウェイトポートフォリオ (EW), 主成分リスクパリティポートフォリオ (PCA), 複素主成分リスクパリティポートフォリオ (HPCA), シュレディンガー・リスクパリティポートフォリオ (SPCA) の4つを比較する。それぞれ詳細は次の通りである。また、各ポートフォリオは20日(月次)でパラメータを再推定し、リバランスを行う。

EW: 全ての資産を均等に保有する等ウェイトポートフォリオ [3]。

PCA: 過去60日分のリターンデータに対して主成分分析を行い、主成分リスクが均等になるように投資する主成分リスクパリティ・ポートフォリオ [13]

HPCA: 過去60日分のリターンデータから複素主成分分析を行い、複素主成分リスクが均等になるように投資する複素主成分リスクパリティ・ポートフォリオ [13]

SPCA: 過去60日分のリターンデータから調和振動子ポテンシャルを用いたシュレディンガー主成分分析を行い、主成分リスクが均等になるように投資するシュレディンガー・リスクパリティポートフォリオ (提案手法)

3.3 評価指標

評価指標として、広く使用されている次の3つの指標を使用する [16]。年率収益率 (AR) は、ポートフォリオの年率換算した収益率を表し、年率リスクは収益率の年率換算した標準偏差として定義され、リターン/リ

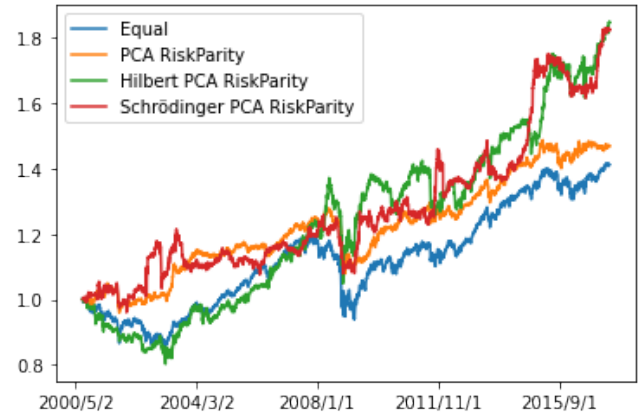


図1: 各ポートフォリオの累積収益率の推移

スク比 (R/R) はリスクで基準化したリターンで定義される。

$$AR = \frac{250}{T} \sum_{t=1}^T R_t \quad (25)$$

$$RISK = \sqrt{\frac{250}{T-1} \times \sum_{t=1}^T (R_t - \mu)^2} \quad (26)$$

$$R/R = AR/RISK \quad (27)$$

ここで、 $\mu = (1/T) \sum_{t=1}^T R_t^L$ である。さらに、リスク指標として広く使用されている最大ドローダウン (MaxDD)[17] を評価する。MaxDD はある期間において、収益のピークから減少する幅のうち最大のものを指す。

$$MaxDD = \min_{k \in [1, T]} \left(0, \frac{W_k^{Port}}{\max_{j \in [1, k]} W_j^{Port}} - 1 \right) \quad (28)$$

$$W_k^{Port} = \sum_{i=1}^k (1 + R_i). \quad (29)$$

3.4 分析結果

各ポートフォリオの評価指標をまとめたものが表2である。表から、AR は HPCA が最も良く、RISK は PCA が最も低い一方で、RR は SPCA が最も良い。さらに下方リスク指標である MaxDD も SPCA が最も低い。したがって、提案手法はファクターのリスクを適切に分散することで効率的にリスク・リターンを確保でき、さらに下方リスクも制御できていることがわかる。図1が各ポートフォリオの累積収益率の推移を示したものである。この図からも提案手法はドローダウンが少なく安定した収益獲得ができていることがわかる。

表 1: 対象資産の詳細と記述統計

Ticker	資産タイプ	説明	平均	標準偏差	歪度	尖度
TX1	債券先物	10 Year T-Note Futures	0.0066	0.4650	-0.2840	4.56
XM1	債券先物	Australian 10 Year Bond	0.0009	0.0621	-0.1400	1.81
CN1	債券先物	Canadian Government 10 Year Note	0.0094	0.4440	-0.2220	2.87
RX1	債券先物	Eurex Euro Bund	0.0129	0.4640	-0.8210	6.95
G1	債券先物	Gilt UK	0.0033	0.5320	-7.3500	214
JB1	債券先物	Japan 10 Year Bond Futures	0.0041	0.2830	-0.5710	5.78
SP1	株式指数先物	S&P500	0.2100	14.7	-0.2500	5.37
XP1	株式指数先物	S&P/ASX 200(Austraria)	0.6240	46.9	-0.2890	5.60
PT1	株式指数先物	S&P/TSX 60 Index(Canada)	0.0776	7.42	-0.6280	7.42
GX1	株式指数先物	DAX(German)	1.1000	90.8	-0.2270	4.01
Z1	株式指数先物	FTSE100(UK)	0.1660	61.3	-0.2230	3.61
NK1	株式指数先物	Nikkei225(Japan)	0.1650	194	-0.3020	5.44
AUD	通貨	AUD/USD	0.0000	0.0064	-0.3610	6.11
CAD	通貨	CAD/USD	0.0000	0.0069	0.0726	2.92
EUR	通貨	EUR/USD	0.0000	0.0077	0.0346	1.85
GBP	通貨	GBP/USD	-0.0001	0.0094	-0.6650	7.55
JPY	通貨	JPY/USD	0.0007	0.6750	-0.1470	3.19

表 2: 各ポートフォリオのパフォーマンス比較

	EW	PCA	HPCA	SPCA
AR	2.11	2.29	3.77	3.67
RISK	5.29	4.28	7.06	6.70
RR	0.40	0.53	0.53	0.55
MaxDD	-26.25	-19.91	-32.28	-17.99

4 まとめ

複数資産からなるポートフォリオのアセット・アロケーションの問題に対して、量子力学にあらわれるシュレーディンガー方程式を応用したシュレーディンガー・リスクパリティポートフォリオを提案し、既存のリスクベースポートフォリオに対する性能評価を行った。提案手法は少数サンプル点しか得られないケースにおいてもリスクの推定精度が安定する効果があることから、既存手法に対して高いリスク分散効果が得られることが期待される。実際にリスク・リターンおよび最大ドローダウンを比較したところ、既存手法に対して提案手法が上回っていたことから、期待どおりの効果が得られることを確認した。

本研究での実証分析においては、提案手法で使用するポテンシャル関数を調和振動子ポテンシャルとし、資産同士の空間配置を等間隔と仮定したが、シュレーディンガー主成分分析の実施においては、ポテンシャル関数の選択と空間配置を不当間隔にする自由度が存在する。また,[10]と同様にポートフォリオを構成する各資産の

リターンの時系列をヒルベルト変換によって複素化することによって、提案手法をHPCAに拡張することも可能である。これらの方向で提案手法を発展させた際の効果を検証することが今後の課題である。

参考文献

- [1] Harry Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 1952.
- [2] Robert C Merton. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of financial economics*, Vol. 8, No. 4, pp. 323–361, 1980.
- [3] Victor DeMiguel, Lorenzo Garlappi, and Raman Uppal. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/n portfolio strategy? *The review of Financial studies*, Vol. 22, No. 5, pp. 1915–1953, 2009.
- [4] Richard O Michaud. The markowitz optimization enigma: Is ‘optimized’ optimal? *Financial analysts journal*, Vol. 45, No. 1, pp. 31–42, 1989.
- [5] Roger Clarke, Harindra De Silva, and Steven Thorley. Minimum-variance portfolio composition. *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 37, No. 2, pp. 31–45, 2011.

- [6] Edward Qian. Risk parity portfolios: Efficient portfolios through true diversification. *Panagora Asset Management*, 2005.
- [7] Sébastien Maillard, Thierry Roncalli, and Jérôme Teïletche. The properties of equally weighted risk contribution portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 36, No. 4, pp. 60–70, 2010.
- [8] Yves Choueifaty and Yves Coignard. Toward maximum diversification. *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 35, No. 1, pp. 40–51, 2008.
- [9] 中川慧. リスクベース・ポートフォリオの高次モーメントへの拡張. リスク管理・保険とヘッジ (ジャーナル・ジャーナル) , pp. 49–71, 2017.
- [10] Yusuke Uchiyama, Takanori Kadoya, and Kei Nakagawa. Complex valued risk diversification. *Entropy*, Vol. 21, No. 2, p. 119, 2019.
- [11] Kei Nakagawa and Yusuke Uchiyama. Go-girsrk model with application to higher order risk-based portfolio. *Mathematics*, Vol. 8, No. 11, p. 1990, 2020.
- [12] Thorsten Poddig and Albina Unger. On the robustness of risk-based asset allocations. *Financial Markets and Portfolio Management*, Vol. 26, No. 3, pp. 369–401, 2012.
- [13] Attilio Meucci. Managing diversification. *Risk*, Vol. 22, No. 5, p. 74, 2009.
- [14] Seisuke Sugitomo and Keiichi Maeta. Quaternion valued risk diversification. *Entropy*, Vol. 22, No. 4, p. 390, 2020.
- [15] Ziming Liu, Sitian Qian, Yixuan Wang, Yuxuan Yan, and Tianyi Yang. Schrödinger pca: You only need variances for eigenmodes. *arXiv preprint arXiv:2006.04379*, 2020.
- [16] Michael W Brandt. Portfolio choice problems. In *Handbook of financial econometrics: Tools and techniques*, pp. 269–336. Elsevier, 2010.
- [17] Malik Magdon-Ismail and Amir F Atiya. Maximum drawdown. *Risk Magazine*, Vol. 17, No. 10, pp. 99–102, 2004.