

確率的にホールドの長さが決まる人工市場モデル

Stochastically determined holding periods in the artificial financial market model

片平啓^{1*} 陳昱² 秋山英三¹
Kei Katahira¹ Yu Chen² Eizo Akiyama¹

¹ 筑波大学システム情報系

¹ Faculty of Engineering, Information and Systems, University of Tsukuba

² 東京大学大学院新領域創成科学研究科

² Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo

Abstract: 本研究では、人工市場モデル「投機ゲーム」を洗練化した「Self-organized Speculation Game (SOSG)」をさらに単純化し、パラメータの数を減らした軽量モデル「Pure Random Speculation Game (PRSG)」を構築した。PRSGのプレイヤーは、戦略テーブルの代わりに、確率に従ってホールドの長さを決めるため、往復取引を「機械的に」行う。しかし、SOSGと同様に市場規模が自発的に定まり、また、volatility clusteringなどの基本的なstylized factsが創発する。一方で、asymmetry in time scalesなどの高次のstylized factsについては、PRSGでは再現されない。高次特性の消失には、価格変動の時間構造に投機的パターンが見られないことが関連していると考えられる。

1 はじめに

株価や指数、為替などの金融に関する時系列データには、stylized facts と総称される、いくつかの普遍的な統計性質が存在する。Cont[1]によれば、少なくとも11個の性質が確認されており、代表的な基本特性としては、volatility clusteringがよく知られている。これは、金融価格のリターンを時系列プロットすると、大きく上下動する部分（ボラティリティの大きい部分）がまとまって現れる性質である。

Volatility clusteringをはじめとする多くのstylized factsは、市場や金融商品の違いに依存せず、トレーダー間の相互取引の中で「自発的に」創発する特性である。よって、これらの性質の発現メカニズムをモデルにより理解しようとするならば、外部からの調整が必要なパラメータの数は、できる限り少ない方が望ましい。このような観点から、単一ポジションの往復取引を実装した人工市場モデル「投機ゲーム」[2]を洗練化し、stylized factsの再現に必要な主要パラメータの数を5つから3つに減らしたモデルが「Self-organized Speculation Game (SOSG)」[3]である。

SOSGは、少数派ゲーム[4]で用いられた戦略テーブルによる意思決定の仕組みを応用して考案した投機ゲームに、ゆっくりと1粒ずつ砂を落とす砂山モデル

[5]の仕組みを取り入れ、市場規模が自発的に定まるように改良を施したモデルである。SOSGでは、砂山モデルとの振る舞いの類似性から、金融市場においても、外部からの調整が無くとも自然に準臨界状態にまで到達する、自己組織化準臨界[6]の原理が働いており、それがstylized factsの自発的創発に寄与している可能性があることが示唆された。SOSGは、投機ゲームと同様に、10個のstylized factsを同時に再現することが可能である。

Stylized factsの中でも、基本特性であるvolatility clusteringの創発メカニズムについては、多くの先行研究が、他人の行動に同調する群衆行動[7]により引き起こされることを明らかにしている。一方、SOSGでは、往復取引におけるホールド期間の多様性によりvolatility clusteringが発生するという事を初めて示した[8]。

しかし、SOSGは、投機ゲームの根幹のみを抽出したスマートなモデルである一方、パラメータ数の削減という観点においては、まだ工夫の余地が残っている。たとえば、volatility clusteringの創発メカニズムに着目すれば、ホールド期間の多様性が保証される変更である限り、stylized factsの再現には問題がないはずである。よって、戦略テーブルによる意思決定構造を取り除き、もっと単純に、確率に従ってホールド期間が様々な値になるような仕組みに置き換えたとしても、再現モデルとしては機能すると考えられる。

*連絡先：筑波大学システム情報系
〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1
E-mail: k.katahira@akiyama-lab.net

そこで、本研究では、戦略テーブルの代わりに確率を SOSG に導入することで、パラメータの数を減らした軽量な人工市場モデル「Pure Random Speculation Game (PRSG)」を構築する。具体的には、PRSG のプレイヤーは、過去の価格変動を一切考慮せず、確率に従ってホールドの長さを決め、往復取引を「機械的に」行うように変更する。さらに、PRSG と SOSG のシミュレーション結果を比較することで、プレイヤーの意思決定方法の違いが価格変動に与える影響についても調べる。

2 PRSG と SOSG

PRSG と SOSG の違いを明確にするため、はじめに SOSG を説明し、その後 PRSG で変更する部分について述べる。

SOSG では、開始時に誰もいないゲーム市場に、毎時間ステップ t のはじめに、プレイヤー i が 1 人参入する。次に、ゲーム市場にいる $N(t)$ 人が、買い (= 1) と売り (= -1) と待機 (= 0) の中から、行動 $a_i(t)$ として 1 つ選ぶ。プレイヤーが買い、または売り (空売りも可能) の注文を出す場合、注文量 $q_i(t)$ は、資本 $w_i(t)$ に応じて次のように決める：

$$q_i(t) = \lfloor \frac{w_i(t)}{B} \rfloor. \quad (1)$$

$\lfloor \dots \rfloor$ は床関数であり、取引単位量 B は、複数量注文のしやすさを調整するパラメータである。ただし、各プレイヤーの初期資本量は $10B$ とし、往復取引の始めと終わりの注文量は同じとする。

市場価格の変動 Δp は、買いと売りの需給関係で決まる文献 [9] の注文不均衡式に倣い、初期価格¹を任意として、

$$\Delta p = p(t) - p(t-1) = \frac{1}{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} a_j(t) q_j(t) \quad (2)$$

のように決める。なお、ファンダメンタリストなどの投機家以外の影響も考慮したい場合は、 Δp に摂動項を加える [10][11]。

記憶長 M のプレイヤーは、行動の選択にあたり、長さ M の 5 進数の履歴 $H(t)$ を参照する。 $H(t)$ は、次のように決まる離散価格変動 $h(t)$ の列により構成される：

$$h(t) = \begin{cases} 2 \text{ (大きく上昇)} & \text{if } \Delta p > C, \\ 1 \text{ (上昇)} & \text{if } C \geq \Delta p > 0, \\ 0 \text{ (変化なし)} & \text{if } \Delta p = 0, \\ -1 \text{ (下落)} & \text{if } -C \leq \Delta p < 0, \\ -2 \text{ (大きく下落)} & \text{if } \Delta p < -C. \end{cases} \quad (3)$$

¹本研究では、リターン $r(t) = \ln p(t) - \ln p(t-1)$ を計算する場合上、 $p(0) = 100 (\gg 1)$ とする。

認知閾 C は、大きな価格変動とプレイヤーが認識する境界値を表すパラメータである。 $H(t)$ の参照後、市場参入時にランダムに与えられた唯一の戦略に従い、履歴パターンに対応する推奨行動 $a_i(t)$ を選ぶ (表 1 を参照)。ただし、単一ポジションの往復取引を実現するため、取引の開始ポジションと同じ行動を戦略が推奨する場合には、代わりに待機を選択する。

表 1: $M = 3$ の戦略テーブルの例。

履歴			推奨行動
-2	-2	-2	1
-2	-2	-1	0
-2	-2	0	0
-2	-2	1	-1
-2	-2	2	1
-2	-1	-2	0
	\vdots		\vdots
2	2	2	-1

往復取引のパフォーマンスは、 $H(t)$ における Δp の大きさ情報の粗さを考慮し、人間の抽象的情報処理の様子を反映した認知的世界²において、次の認知価格 $P(t)$ に基づいて評価する：

$$P(t) = P(t-1) + h(t). \quad (4)$$

プレイヤーがポジションを t_0 に開き、 t に反対売買により閉じる場合、この往復取引における単位量あたりの認知的利得 $\Pi_i(t)$ は、以下のように求められる：

$$\begin{aligned} \Pi_i(t) &= a_i(t_0)(P(t) - P(t_0)) \\ &= a_i(t_0) \sum_{k=t_0+1}^t h(k). \end{aligned} \quad (5)$$

さらに、現実的世界の $w_i(t)$ を更新するため、注文量 $q_i(t)$ を考慮して $\Pi_i(t)$ を単調増加な関数 f で変換し、資本調整 $\Delta w_i(t)$ を求める：

$$\begin{aligned} w_i(t) &= w_i(t_0) + \Delta w_i(t) \\ &= w_i(t_0) + f(\Pi_i(t) q_i(t_0)). \end{aligned} \quad (6)$$

SOSG では、単純化のため、 $\Delta w_i(t) = \Pi_i(t) q_i(t_0)$ とする。資本の更新により $w_i(t) < B$ となり、1 単位も注文できない状態に陥ったプレイヤーは、ゲーム市場から退出する。

以上が、SOSG の仕組みである。なお、SOSG の主要パラメータは、記憶長 M と取引単位量 B と認知閾 C の 3 つである。

²現実的世界と認知的世界については、[2] の Fig.1 を参照。

対して、PRSG では、戦略テーブルの撤廃に伴い、履歴の長さを決める M や、攪乱効果によりボラティリティの発散を防ぐ C が不要になる [8]. その代わりに、ポジションを閉じるための終了確率 Z という新規パラメータを導入するので、PRSG の主要パラメータは、 B と Z の 2 つになる。

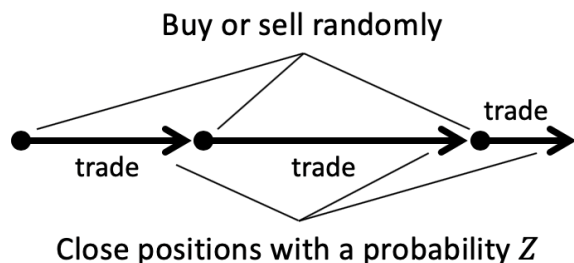


図 1: PRSG のプレイヤーが行う意思決定のイメージ。

PRSG のプレイヤーは、図 1 に示すように、ある往復取引を終えるとすぐに、次の時間ステップに新しい往復取引を始める。開始ポジションについては、買いか売りをランダムに決める。開いたポジションは、終了確率 Z に従って反対売買により閉じ、それ以外の場合は待機を選択する。よって、PRSG のプレイヤーは、価格変動からのフィードバックを受けずに往復取引を「機械的に」行う（真の意味で往復取引を行っていない）。

最後に、PRSG では C が不要なので、式 3 を以下のように変更する：

$$h(t) = \begin{cases} 1 \text{ (上昇)} & \text{if } \Delta p > 0, \\ 0 \text{ (変化なし)} & \text{if } \Delta p = 0, \\ -1 \text{ (下落)} & \text{if } \Delta p < 0. \end{cases} \quad (7)$$

PRSG のプレイヤーは履歴を参照することはないが、 $h(t)$ は資本の更新に使用するため、このような変更が必要となる。

3 結果・考察

はじめに、PRSG においても、SOSG と同じように、自発的に市場規模が定まりながら、volatility clustering が創発することを示す。図 2 は、 $B = 12$, $Z = 0.05$ (以降固定) としたときの (a) ゲーム市場に残留しているプレイヤー数、および (b) 対応する市場価格のリターン $r(t)$ の時系列プロットである。図 2 の (a) では、ゲーム開始直後に 1000 人程度まで線形的に増加した後、プレイヤー数はその周辺値で揺らいでおり、時間の経過と共に市場規模が自ずと調整されている。また、対応する図 2 の (b) のリターンについても、まとまった大きな

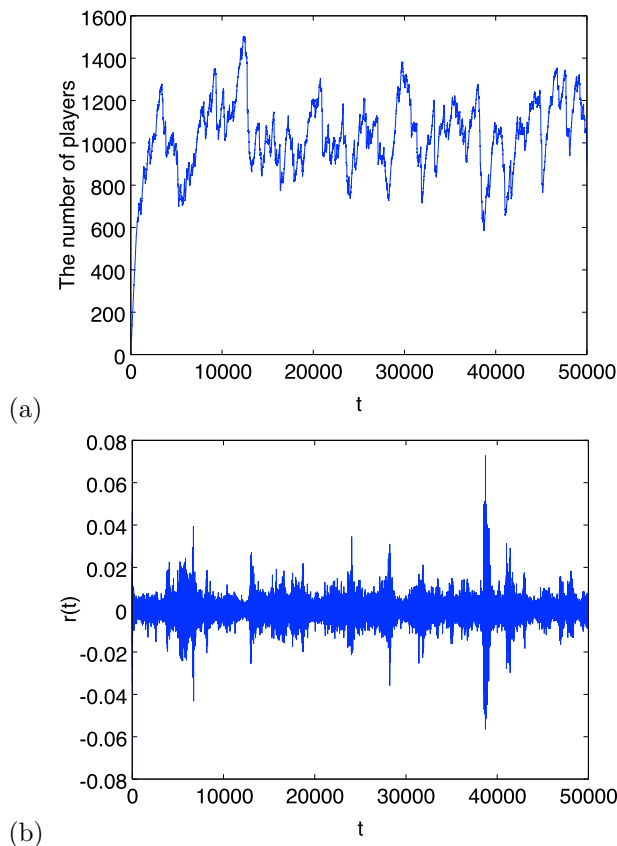


図 2: (a)PRSG のゲーム市場に残留するプレイヤー数と (b) 対応するリターンの推移。

増減が間欠的に見られ、安定的に volatility clustering が再現されている。

しかし、PRSG では、SOSG で再現できた高次（相関）の stylized facts が消失してしまう。たとえば、PRSG の asymmetry in time scales の性質は、SOSG のものに比べて非常に弱い。Asymmetry in time scales とは、時間スケール（解像度）の粗いボラティリティによって、時間スケールの細かいボラティリティを予測する方が精度が高くなる性質である [12].

時間スケールの粗いボラティリティ $v^c(t)$ と細かいボラティリティ $v^f(t)$ は、次のように定義される：

$$v^c(t_i) = \left| \sum_{j=1}^n r(t_{i-1} + j\Delta t, \Delta t) \right|, \quad (8)$$

$$v^f(t_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |r(t_{i-1} + j\Delta t, \Delta t)|. \quad (9)$$

ただし、時間スケールは $\Delta t = (t_i - t_{i-1})/n$ と定義され、 $v^f(t)$ については、平均化 ($1/n$ 倍) しない場合もある。たとえば、 $\Delta t = 1$ 日、 $n = 5$ とすると、 $v^c(t)$ は週足のボラティリティを、 $v^f(t)$ は日足（平均）のボラティリティを意味する。

Asymmetry in time scales は、 $v^c(t)$ と $v^f(t)$ の時間ラグ τ に関する時差相関

$$\rho_{cf}(\tau) = \text{Corr} [v^c(t + \tau), v^f(t)] \quad (10)$$

によって説明される。金融価格の時系列データから $\rho_{cf}(\tau)$ を求めると、 $|\tau|$ が小さいとき $\rho_{cf}(\tau) < \rho_{cf}(-\tau)$ となり、 $\rho_{cf}(\tau)$ を τ に対してプロットすると、 $\rho_{cf}(\tau)$ は $\tau = 0$ を境に非対称な分布になる。

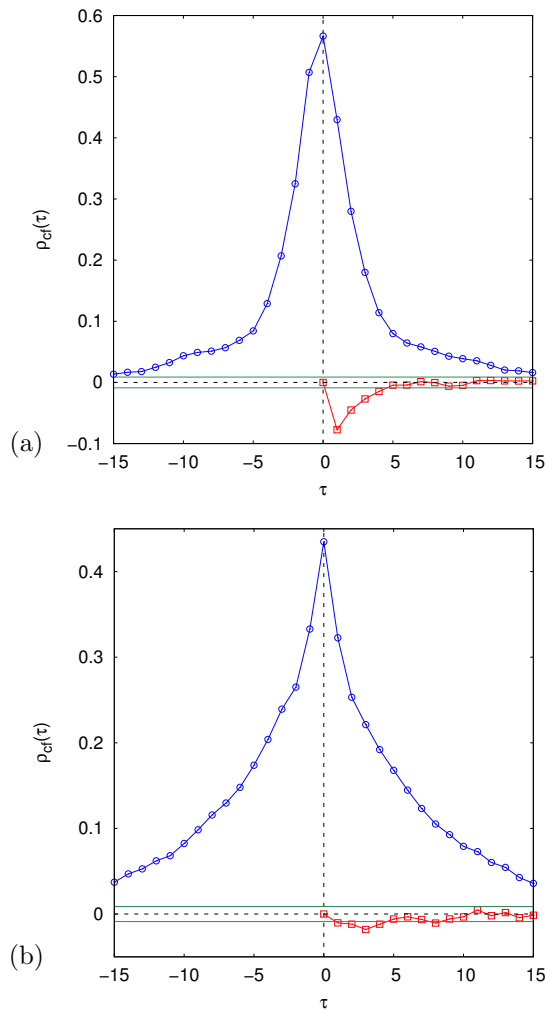


図 3: 時差相関における (a)SOSG の強い非対称性と (b)PRSG の非常に弱い非対称性。

図 3 は、 $\Delta t = 10$ 、 $n = 5$ として、50 時間ステップ間隔で $v^c(t)$ と $v^f(t)$ を計算してプロットした $\rho_{cf}(\tau)$ の (a)SOSG ($M = 5$ 、 $B = 9$ 、 $C = 3$ 、以降固定) と (b)PRSG の結果 (100 試行回平均) である。図 3 の (a) では、 $\rho_{cf}(\tau)$ (青い丸点) は $\tau = 0$ に関して非対称になっているが、図 3 の (b) では、ほとんど非対称性が見られない。また、相関差 $\rho_{cf}(\tau) - \rho_{cf}(-\tau)$ (赤い四角点) においても、図 3 の (a) では、 $|\tau| < 5$ のとき、

価格がランダムウォークする場合の $\rho_{cf}(\tau)$ の 95% 信頼区間 (2 本の緑の直線の間) から有意に負になっているのに対し、図 3 の (b) では、それほど乖離していない。

これは、図 3 の (a) では、過去の細かいボラティリティと未来の粗いボラティリティの相関 $\rho_{cf}(\tau)$ よりも、過去の粗いボラティリティと未来の細かいボラティリティの相関 $\rho_{cf}(-\tau)$ の方が有意に大きいことを意味する。したがって、SOSG では、時間スケールの粗いボラティリティで細かいボラティリティを予測の方が効果的であり、asymmetry in time scales が創発していると言える。一方、図 3 の (b) では、有意に $\rho_{cf}(\tau) < \rho_{cf}(-\tau)$ となっておらず、PRSG では、その特性が失われている。

なお、PRSG では、SOSG で創発していた leverage effect と呼ばれるもう 1 つの高次の stylized facts についても、再現することができない。Leverage effect とは、未来のボラティリティが過去のリターンと負の相関を持つという性質である [13]。

Asymmetry in time scales などの高次の stylized facts が PRSG で消えてしまうのは、プレーヤーが価格変動を一切考慮せず、確率に従って機械的に取引を行っているためではないかと考えられる。その証拠に、研究 [11] で提示した、価格変動の時間構造に現れる投機的パターンについて調べてみると、SOSG と PRSG の間で異なる結果が得られる。図 4 の (a) と (b) のヒストグラムは、SOSG と PRSG で生成したそれぞれの Δp を以下のルール

$$b(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } \Delta p < 0, \\ 1 & \text{if } \Delta p > 0, \end{cases} \quad (11)$$

に従って 2 進数の時系列 $b(t)$ に変換し³、記憶長を $M = 5$ として各履歴シグナルの出現回数を数えてプロットしたものである。図 4 の (a) の SOSG では、10 と 21 (2 進数では $[0, 1, 0, 1, 0]$ と $[1, 0, 1, 0, 1]$) にピークがある対称的な分布になっており、典型的な投機的パターンが見られる⁴。一方、図 4 の (b) の PRSG では、2 つのピークがなく、特徴的なパターンが見られない。図 4 の (a) と (b) における分布形状の違いは、高次の stylized facts の創発には、投機的パターンを内包する価格変動が必要であり、また、投機ゲームタイプのモデルでそのパターンを発生させるためには、価格変動からのフィードバックが働く戦略テーブルによる往復取引の仕組みが重要であることを示唆する。

4 むすび

本研究では、SOSG の戦略テーブルによる意思決定の仕組みを、確率によって簡素化した人工市場モデル

³ $\Delta p = 0$ も時折存在するので、 $b(t)$ の時間間隔は一定ではない。

⁴FX の時系列データなどからも、特に時間スケールの小さいとき、このような対称的な二峰性の分布が得られる [11]。

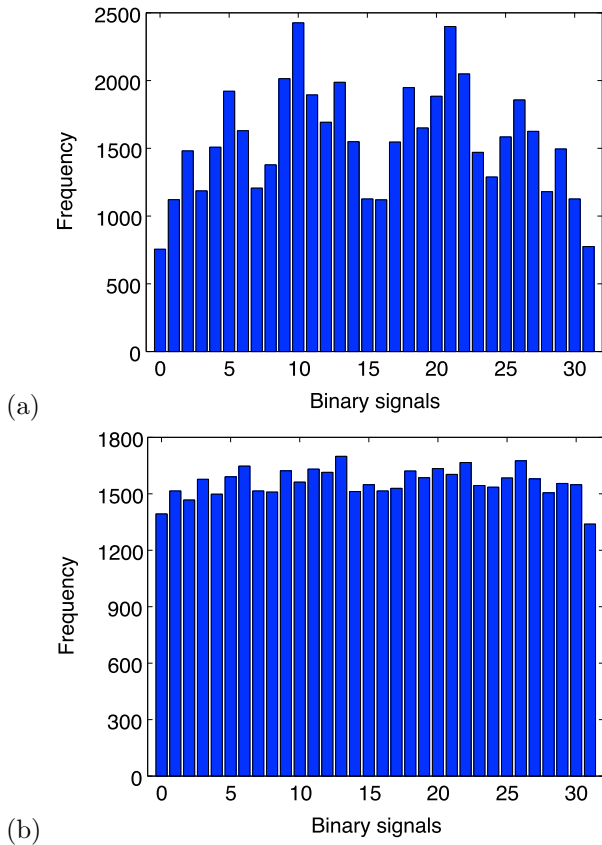


図 4: (a)SOSG と (b)PRSG における 2 進数の履歴シグナルのヒストグラム。

「PRSG」を構築した。SOSG よりも主要パラメータの数が 1 つ減っているのにも関わらず、PRSG は、市場規模の自己調整機能を保持しており、また、volatility clustering などの基本的な stylized facts を再現することができることが分かった。

なお、SOSG と PRSG には決定的な違いがあり、asymmetry in time scales などの高次の stylized facts については、PRSG では創発しない。これには、2 進数化した価格変動の時間構造に投機的パターンが見られないことが関係していると考えられる。つまり、プレイヤーが確率的にホールドの長さを決め、機械的に往復取引を行う PRSG では、投機的な価格変動が生じておらず、その結果として、高次の stylized facts が失われている可能性がある。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 JP17J09156, JP20J00107 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues.
- [2] Katahira, K., Chen, Y., Hashimoto, G., & Okuda, H. (2019). Development of an agent-based speculation game for higher reproducibility of financial stylized facts. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 524, 503-518.
- [3] Katahira, K., Chen, Y., & Akiyama, E. (2021). Self-organized Speculation Game for the spontaneous emergence of financial stylized facts. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 582, 126227.
- [4] Challet, D., & Zhang, Y. C. (1997). Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 246(3-4), 407-418.
- [5] Bak, P., Tang, C., & Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise. *Physical review letters*, 59(4), 381.
- [6] Bonachela, J. A., & Munoz, M. A. (2009). Self-organization without conservation: true or just apparent scale-invariance?. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2009(09), P09009.
- [7] Challet, D., Marsili, M., & Zhang, Y. C. (2001). Stylized facts of financial markets and market crashes in minority games. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 294(3-4), 514-524.
- [8] Katahira, K., & Chen, Y. (2021). Heterogeneous Round-Trip Trading and the Emergence of Volatility Clustering in Speculation Game. *Journal of Systems Science and Complexity*, 1-24.
- [9] Bouchaud, J. P., & Cont, R. (2000). Herd behaviour and aggregate fluctuations in financial market. *Macroeconomic Dynamics*, 2, 170-196.
- [10] Katahira, K., & Chen, Y. (2020). An extended Speculation Game for the recovery of Hurst exponent of financial time series. *New Mathematics and Natural Computation*, 16(02), 319-325.
- [11] Katahira, K., Chen, Y., & Akiyama, E. The speculative traces in binarized price changes of the

financial markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* (under review).

- [12] Gavrishchaka, V. V., & Ganguli, S. B. (2003). Volatility forecasting from multiscale and high-dimensional market data. *Neurocomputing*, 55(1-2), 285-305.
- [13] Bouchaud, J. P., Matacz, A., & Potters, M. (2001). Leverage effect in financial markets: The retarded volatility model. *Physical review letters*, 87(22), 228701.