金融取引における動的均衡での執行精度について

Execution Precision at Dynamic Equilibrium in Financial Trading

阿部 亮

Ryo Abe

株式会社 シンプレクス・テクノロジー

Simplex Technology, Inc.

Abstract: In financial trading, total order amount changes by Trader's order. And, it changes various speed. In this article, we'll be showed equilibrium formula in this dynamics by classical Operations Research model. Originally, this model was used for military purpose. Now, we'll use this model to find dynamic equilibrium on Buyer's and Seller's "Market Share". And, we'll get effect by execution precision at this dynamic equilibrium.

1 はじめに

従来のファイナンス理論においては､｢市場は均衡状態にある｣と仮定されてモデルが構築されてきた。その仮定とは、人々の情報と選好が同質的であること、そして全ての金融商品に「一物一価の法則」が成立し、なおかつ裁定取引が不可能であるという仮定である。このような仮定を置いたモデルの下では、価格の変動に対し影響されない（リスク中立）確率測度が存在し、その確率測度の下で行われた価格付けの結果が均衡状態における理論価格とされた。

上記のような従来のモデルは、金融商品の「価格付け」というものを我々に考えさせる動機となり、学界のみならず実務においても非常に有用され、そして恩恵をもたらしてきた。しかし、昨今の金融商品取引の現場においては、情報化技術の進歩に伴う意思決定と価格変動の迅速化により、従来のモデルを使用するのみでは取引戦略の決定がしにくくなりつつある。このような現状に鑑み、迅速な取引戦略の決定に寄与すべく本研究を行った。

2 アプローチ

本研究では、オペレーションズ・リサーチの分野で軍事的闘争の戦略的意思決定に用いられてきた「ランチェスター・モデル」を応用したアプローチをとる。斧田[17]で言及されているように、古典的なランチェスター・モデルは改良され、現在までマーケティングの分野で応用されてきた。

本研究では、ランチェスター・モデルにおいて兵力とされたものを､｢任意の証券についての全注文総額に対する売り注文総額、及び買い注文総額の占める比率」として用いるものとする。そして均衡の概念を、この占有率の動的振る舞いとしてとらえ、均衡における占有率に対し、執行の効率性が与える影響を示す。

2.1 約定力と執行精度

前述した仮定に基づき、本研究では以下のような係数を用いる。

$$\frac{P}{Q} = \frac{b^2}{a^2} \cdots ①$$

b:売り注文の執行精度　a:買い注文の執行精度

P:売り注文の約定力　Q:買い注文の約定力

上記①を、「約定力係数」とする。ここで、「約定力」とは、ある証券に対する買い注文、もしくは売り注文が執行した結果としての「約定し易さ」を表すものである。また､｢執行精度」とは、売り注文及び買い注文において、システム効率やトレーダーの人数に比例するもの、すなわち「執行における効率性」を表すものである。

本研究における以下のモデルでは、注文総額ベー

*連絡先：株式会社 シンプレクス･テクノロジー
〒103-0027 東京都中央区日本橋 1-4-1
日本橋一丁目ビルディング 15F
Email: abe.ryo@simplex-tech.co.jp

スでの占有率の均衡において、執行精度がどの程度影響を及ぼすのかが示される。

2.2　具体的なモデル

さらに、本研究では以下のように定式化する。なお、m は売り注文総額であり、n は買い注文総額である。また、未約定総額には未執行分の注文も含むとする。

$$\frac{dm}{dt} = P - \beta\frac{an_s^2}{m_t}P - \alpha(m_t + n_t)$$

$$\frac{dn}{dt} = Q - \beta\frac{bm_s^2}{n_t}Q - \alpha(m_t + n_t)$$

m_s, m_t :売り注文の約定総額,未約定総額

n_s, n_t :買い注文の約定の総額,未約定総額

α, β :共通比例定数(正)

通常、上式のような非線形連立微分方程式を解くのは困難である。しかし、ゲーム理論（ゲーム理論の詳細については西田[22]を参照のこと）における「ミニ･マックス原理」を援用し、以下では連立微分方程式の差分をとる。そして、売り注文については差分方程式の最大化を行い、買い注文については差分方程式の最小化を行う事によって均衡解を得ることが可能となる。

2.3　モデルの解法

前節で定式化した非線形連立微分方程式の差分方程式は、

$$L(m_t, n_t) = \frac{dm}{dt} - \frac{dn}{dt} = P - Q - \beta\left\{\frac{an_s^2}{m_t}P - \frac{bm_s^2}{n_t}Q\right\}$$

$$= P - Q - \beta\left\{\frac{a(n-n_t)^2}{m_t}P - \frac{b(m-m_t)^2}{n_t}Q\right\} \cdots ②$$

（ただし、$m = m_t + m_s, n = n_t + n_s$）

であり､式②における最大･最小条件として式②を二階まで偏微分することになる。数式で示せば以下のようになる。

$$（一階条件）: \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial m_t} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial n_t} = 0 \end{aligned}$$

2.4　均衡解の導出

ここでは前述の各一階条件を計算する。

（売り注文について）

$$\frac{\partial L}{\partial m_t} = \beta\left\{\frac{aP(n-n_t)^2}{m_t^2} - \frac{2bQ(m-m_t)}{n_t}\right\} = 0$$

$$\therefore aPn_t(n-n_t)^2 = 2bQm_t^2(m-m_t)$$

（買い注文について）

$$\frac{\partial L}{\partial n_t} = \beta\left\{\frac{2aP(n-n_t)}{m_t} - \frac{bQ(m-m_t)^2}{n_t^2}\right\} = 0$$

$$\therefore 2aPn_t^2(n-n_t) = bQm_t(m-m_t)^2$$

売り注文における一階条件より、以下が導出される。

$$(m-m_t) = \frac{aPn_t(n-n_t)^2}{2bQm_t^2}$$

上記を買い注文についての一階条件に代入すれば、

$$2aPn_t^2(n-n_t) = bQm_t\left\{\frac{aPn_t(n-n_t)^2}{2bQm_t^2}\right\}^2$$

より、

$$m_t^3 = \frac{1}{8}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{P}{Q}\right)(n-n_t)^3$$

ここで、

$$\omega = \left(\frac{aP}{bQ}\right)^{1/3}$$

を導入すると、

$$\therefore m_t = \frac{1}{2}\omega(n-n_t) \cdots ③$$

同様に、買い注文についての一階条件より、以下が導出される。

$$(n-n_t) = \frac{bQm_t(m-m_t)^2}{2aPn_t^2}$$

上記を売り注文の一階条件に代入すれば、

$$2bQm_t^2(m-m_t)=aPn_t\left\{\frac{bQm_t(m-m_t)^2}{2aPn_t^2}\right\}^2$$

より、

$$\therefore n_t=\frac{1}{2\omega}(m-m_t)\cdots④$$

さらに、$m_t.n_t$の値を用いれば、

$$m_t=\frac{\omega}{2}\left\{n-\frac{1}{2\omega}(m-m_t)\right\}=\frac{\omega}{2}n-\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}m_t$$

ゆえ、

$$\therefore m_t=\frac{1}{3}(2\omega n-m)\cdots⑤$$

n_tについても同様に求めれば、

$$n_t=\frac{1}{2\omega}\left\{m-\frac{\omega}{2}(n-n_t)\right\}=\frac{m}{2\omega}-\frac{1}{4}n+\frac{1}{4}n_t$$

ゆえ、

$$\therefore n_t=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\omega}m-n\right)\cdots⑥$$

ここで、$m_s=m-m_t$ゆえ、

$$m_s=m-\frac{1}{3}(2\omega n-m)=\frac{4}{3}m-\frac{2}{3}\omega n$$

$$=\frac{2}{3}\omega\left(\frac{2}{\omega}m-n\right)=2\omega n_t$$

$$\cdots⑦$$

また、$n_s=n-n_t$ゆえ、

$$n_s=n-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\omega}m-n\right)=\frac{4}{3}n-\frac{2}{3\omega}m$$

$$=\frac{2}{3\omega}(2\omega n-m)=\frac{2m_t}{\omega}$$

$$\cdots⑧$$

こうしてモデルにおける均衡解⑤、⑥、⑦、⑧が導出されたことになる。各々の均衡解に①を代入すると、

$$\omega=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\cdots⑨$$

となるので、均衡解は以下のようになる。

$$m_t=\frac{1}{3}\left\{2n\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}-m\right\}\qquad n_t=\frac{1}{3}\left\{2m\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}-n\right\}$$

$$m_s=2n_t\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\qquad\qquad n_s=2m_t\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$$

上記の均衡解においては重要なことが示されている。売り注文の注文総額は、売り注文の執行精度の１/３乗に比例し且つ買い注文の執行精度の１/３乗に割り引かれる。逆に買い注文の注文総額は、買い注文の執行精度の１/３乗に比例し且つ売り注文の執行精度の１/３乗に割り引かれる。つまり、注文総額に対する執行精度の寄与率は１/３乗であることが示された。

３　執行精度の効果

本章では、安定的占有率を持つ注文の条件を以下のように定める。

$$m_s>m_t$$

ただし、

$$m+n=1\quad\cdots⑩$$

つまり、約定済みの注文総額が未約定の注文総額より多いということである。また、⑩は各々を占有率とみなした場合の制約である。上記に、均衡解を代入して展開すると、以下のようになる。

$$\frac{2}{3}(2m-\omega n)>\frac{1}{3}(2\omega n-m)$$

ゆえ、

$$4m-2\omega n>2\omega n-m$$

$$5m>4\omega n$$

$$\frac{m}{n}>\frac{4}{5}\omega$$

ここで、上式に⑨と⑩を代入し、

$$\frac{m}{1-m} > \frac{4}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$$

これを m についてまとめれば、

$$\therefore m > \frac{4}{4+5\sqrt[3]{a/b}}$$

もし、売り注文の占有率が高ければ、注文総額の半分以上を占めることになるので、上式の右辺につき以下のように置く。

$$\frac{4}{4+5\sqrt[3]{a/b}} > \frac{1}{2}$$

$$b > \left(\frac{5}{4}\right)^{3} a \equiv 1.953125a$$

つまり、執行精度が約 2 倍以上であり、かつ市場占有率が 50%以上の場合は、約定済みの注文総額が未約定の注文総額より多く、市場占有率は安定的であるということが示された。

4　まとめと今後の課題

本研究では、ある証券の売り注文と買い注文の注文総額について非線形連立微分方程式を立てた。そして均衡状態の導出においては、ゲーム理論におけるミニ・マックス原理を援用することで、注文総額ベースの市場占有率に対し均衡式を導出した。

導出された解においては、均衡状態での市場占有率に対し、各々の注文の執行精度は 1/3 乗の寄与率で影響を与えることが示された。さらに、執行精度が 2 倍以上の場合で、且つ注文の占有率が 50%以上であれば、未約定注文総額より約定総額が多く、この場合の市場占有率は安定的であることも示された。

執行精度をもっと現実的に表現すると、「システムの効率化」や、「トレーダーの増加」ということになるが、これらのことが実際に約定力や市場占有率に与える影響について詳細な実証分析を行うことは残された課題といえる。また、本研究において応用したモデルは、「捕食ゲーム」として有名な、ロトカ・ヴォルテラ方程式の一種であり、進化ゲーム的アプローチである。このようなモデルから得られた結果が、既存のファイナンス理論から得られる結果と比較した場合、どのような点が異なり、またどのような点が一致するのかを検証することも今後の残された課題であると思われる。

5　補論:ランチェスター・モデル

古典的ランチェスター・モデルにおいては、まず対立する二つの軍団が存在することが仮定さている。

今、m 軍と n 軍が対決・戦闘状態にあるとしよう。そして、m 軍の兵力を m とし、n 軍の兵力を n とする。また、m 軍の武器効率・技量を b 、n 軍の武器効率・技量を a とする。その際、時々刻々の両軍の残存数推移は以下の連立微分方程式によって表される。

$$\frac{dm}{dt} = -an \quad \text{かつ} \quad \frac{dn}{dt} = -bm \quad \cdots①$$

ここで、式④の両軍の時々刻々の残存数比 E を考えると、

$$\frac{n\,{}^{dn}\!/_{dt}}{m\,{}^{dm}\!/_{dt}} = \frac{b}{a} = E$$

ゆえ、

$$\int ndn = E\int mdm$$

とでき、最終的に「ランチェスターの 2 次法則」と呼ばれる以下の式が導出される。

$$\therefore n_0^2 - n^2 = E(m_0^2 - m^2)\cdots②$$

ここで、例えば m 軍が勝つ事は

$$m = + \quad \text{かつ} \quad n = 0$$

となることであるから、上式②に代入すれば「勝利の条件」と呼ばれる以下の式が導かれる。

$$\sqrt{E} > \frac{n_0}{m_0}$$

また、式①の一般解は以下のようになる。

$$m = \frac{1}{2}\left\{\left(m_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}n_0\right)e^{\left(\sqrt{ab}\right)t} + \left(m_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}n_0\right)e^{\left(-\sqrt{ab}\right)t}\right\}$$

および

$$n = \frac{1}{2}\left\{\left(n_0 - \sqrt{\frac{b}{a}}m_0\right)e^{\left(\sqrt{ab}\right)t} + \left(n_0 + \sqrt{\frac{b}{a}}m_0\right)e^{\left(-\sqrt{ab}\right)t}\right\}$$

二次法則においては、武器効率比を高めるよりも味方の兵力を集中させるか、敵の兵力を分散した方がはるかに上策とわかる。つまり、優勢側はなるべく集団戦に持ち込むほうがよく、劣勢側は武器効率比を高めるよりも集団戦を避けつつ味方の兵力の集中と、敵の兵力の分断に努める必要がある。

謝辞

本論文は、一橋大学大学院経済学研究科の石村直之教授、及び横浜国立大学大学院国際社会科学研究科の倉澤資成教授をはじめ、筆者が数年前にいただいた多くの方々のアドバイスが元となって作成された。記して謝意を表したい。

なお、本稿における全ての誤りは筆者の責に帰する。

参考文献

[１] Abe, R.: Dynamic optimal investment problem in ALM via the theory of partial differential equations, Thesis for the Master-course degree, Graduate School of Economics, Hitotsubashi University (2006)

[２] Abe, R. and Ishimura, N.: Existence of solutions for the nonlinear partial differential equation arising in the optimal investment problem, Proc. Japan Acad. 84 Ser. A, pp. 11-14 (2008)

[３] Anthony, M. and Biggs, N.: Mathematics For Economics And Finance, Cambridge University Press (1996)

[４] Bodie, Z. and Merton, R. C.: Finance, Prentice-Hall, Inc. (2000)

[５] Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: Investment Under Uncertainty, Princeton University Press (1994)

[６] Docker, E. J., Jorgensen, S., Van Log, N. and Sorger, G.: Differential Game in Economics and Management Science, Cambridge University Press (2000)

[７] Luenberger, D. G.: Investment Science, Oxford University Press, Inc. (1998)

[８] McCandless, G. T. and Wallece, N.: Introduction to Dynamic Macro Economic Theory, Harvard University Press (1991)

[９] Novshek, W.: Mathematics For Economists, Academic Press, Inc. (1993)

[１０] Pierre, N. V. Tu.: Dynamical Systems, Springer (1994)

[１１] Pliska, S. R.: Introduction to Mathematical Finance, Blackwell Publishers (1997)

[１２] Romer, D.: Advanced Macro Economics, McGraw-Hill (2001)

[１３] Schultz, D. G. and Melsa, J. L.: State Functions and Linear Control Systems, McGraw-Hill (1967)

[１４] Varian, H. R.: Microeconomic Analysis, Norton & Company, Inc. (1984)

[１５] 浅子和美, 加納悟, 倉澤資成: マクロ経済学, 新世社 (1993)

[１６] 石村直之: パワーアップ微分方程式, 共立出版 (2001)

[１７] 斧田太公望: 競争に勝つ科学, 開発社 (1980)

[１８] 笠原皓司: 微分積分学, サイエンス社 (1974)

[１９] 澤木勝茂: ファイナンスの数理, 朝倉書店 (1994)

[２０] 武隈慎一: 数理経済学, 新世社 (2001)

[２１] 中村保: 設備投資行動の理論, 東洋経済新報社 (2003)

[２２] 西田俊夫: ゲームの理論, 日科技連 (1973)

[２３] 山浦弘夫: 最適制御入門, コロナ社 (1996)