

# 予約価格を用いた指値・成行注文選択による約定寿命の 冪分布の再現

Recovering power-law distributions of lifetimes of orders both cancelled and executed using an agent-based model containing reservation prices

吉村勇志<sup>1</sup> 陳昱<sup>1</sup>

Yushi Yoishimura<sup>1</sup>, Yu Chen<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> 東京大学大学院新領域創成科学研究科人間環境学専攻

<sup>1</sup>Department of Human and Engineered Environmental Studies,  
Graduate School of Frontier Science, The University of Tokyo

**Abstract:** A lifetime of limit order is defined as the elapsed time from appear (submission) to disappear (cancellation or execution). Lifetime is a key of decision-making of traders because traders submit an order based on the trade-off between execution cost (how much price will be executed at) and delay risk (how long does it takes to be executed) and execution lifetime means the waiting time to execution and cancellation lifetime means the limit time of patience. Therefore, recovering power-law distribution of lifetimes of orders by an agent-based model (ABM) is a benchmark of time related decision-making of agents and contributes to constructing more advanced models. In this study, we created an ABM reproducing both of cancellation and execution lifetime distributions by extending our previous ABM doing only the distribution of cancelled orders.

## 1. 背景

個々の市場参加者の意思決定、市場全体の挙動の何れを考察するにせよ、時間という概念は重要である。

市場参加者が注文を出す際、それを指値にするか成行にするか、指値ならば価格は幾らを指定するかといった意思決定は、取引価格と待ち時間のトレードオフの関係にある。キャンセル注文の提出は時間経過による市況の変化、或いは待ち時間が許容範囲を超えたことによって行われる筈である。このように、市場に対する代表的な注文方法である指値・成行・キャンセル注文の全てがその意思決定において時間という要素を持っている。

市場の時間発展について考えてみると、誰が何時注文を出したか、市場参加者間の注文の順序が大きく影響することは明らかであるように思われる。というのも、市場参加者は板の状態を見て意思決定を行うと考えられるが、板の状態は市場参加者の注文によって変化する。即ち、ある市場参加者が板を変え、それに応じて他の市場参加者の意思決定、注文が変化し、また板の状態が変わるといったフィードバ

ック構造が存在する。従って、ある瞬間の市場に対して誰が真っ先に反応し、注文を出したかによってその後の流れが変わり得る筈である。長い時間スケールが興味の対象で時間的に平均化された統計性質を問題とする場合にはこの違いは重要ではないであろうが、人工市場がより個別の市場の詳細な性質、時間発展をも研究対象として含むことになるならば、注文の順序等の市場の時間構造の再現は必要になってくるであろう(現在のところ、市場の個別の時間発展の研究としては 2010 年アメリカのフラッシュクラッシュを模擬した人工市場モデル[1]が存在する為、一般的な市場の統計性質のみならず個別、具体的な市場の展開の研究に対する潜在的ニーズも存在する筈である)。

人工市場においても現実の市場の時間構造を模倣出来ることが望ましいということ論じてきたが、時間構造とは何を指しているのか、何を再現すれば十分なのかは曖昧であり、何らかの形で捨象して再現すべき性質を定量的に表現する必要がある。本研究ではそれとして注文の寿命の冪分布を選択する。

注文の寿命とは、指値注文が板上に出されてからキャンセル若しくは約定によって消えるまでの経過

時間のことである。これが市場の時間構造において重要な意味を持つことは、次のように説明出来る。

約定によって消えた注文の寿命(約定寿命)は、定義上当然ながら指値注文を出してから約定するまでの経過時間である。即ち、これの分布を知ることは自分が指値注文を出した場合に約定までにどれくらい待つ必要があるのか検討を付けられるということであり、即座に約定する成行注文との選択において意味を持つ(これは指値注文の価格を無視した極めて簡易な議論であることは言うまでもない)。そしてキャンセルによって消えた注文の寿命(キャンセル寿命)は忍耐力が切れてキャンセルするまでの経過時間であり、同時にある市場参加者が注文を出してからもう一度注文を出すまでの経過時間、即ち、1人の市場参加者が市場に参画する頻度の一側面の表現でもある。

このように市場の時間構造の一部である注文の寿命であるが、これの分布を取ると冪分布になるということが知られている。Challet [2]の観測においてはキャンセル寿命の冪指数が $\alpha_C = 2.1$ 、約定寿命が $\alpha_M = 1.5$ であった。この性質は寿命を実時間で測定してもティック時間(注文が1つ出される度に1進む仮想的な時間)で測定しても変わらないようであるが、本研究では簡単な為以降後者で考える。

## 2. 先行研究

人工市場研究における注文の寿命の扱いについて述べる。キャンセル寿命に関して議論する為にはキャンセルがモデルに組み込まれていなければならない。キャンセルが導入された人工市場には、例えば水田[3,4]や Bartolozzi[5]のように、指値/成行注文が出される度に板上の全注文に対しキャンセルされるかどうかの判定を行い、1時間ステップとするものが多い。そしてキャンセルの発生も単純に経過時間が一定値に到達しているかどうか[3,4]、或いはボラティリティにのみ依存する[5]等、単純なものも多くキャンセル寿命の分布を議論すること自体出来ない。例外的に low intelligence model (エージェントは仮定せず確率的に板に注文が到達するが、その確率が板の状態に応じて変化するモデル)の1つである Mike[6](と恐らくはその拡張形[7,8])は Challet の観測とは異なる値でキャンセル寿命の冪分布を再現するものの、約定寿命の冪分布は再現していない。

対して、本研究の前身となった吉村[9,10]は指値/成行注文とキャンセル注文の発注タイミングを同一とした上でキャンセル寿命の冪分布を Challet の指数通りに再現することに成功した。指値/成行/キャンセル注文の発注タイミング統一はそれらの注文間の時間的競合を発生させ、取引に即時性をどれ程求め

ているか、その強さ(緊急性と以下呼称)の比較を可能にし、将来的なモデル拡張にも有益であると考えている。

## 3. モデル開発

### 3.1 PR モデル

3.2 でモデルの詳細を述べる前に本項でその原形である吉村[9,10](以下 PR(previous)モデルと呼ぶ)を解説する。

エージェントの注文順序が固定でも完全ランダムでもなく各人の必要性に応じて行われ、尚且つ競争があるような状況を表現する為に緊急性を用いたルーレット選択によってその時間ステップに注文を出すエージェントを決定するものとする。即ち、各エージェントは自分の緊急性 $u_i(t)$ を計算し、エージェント $i$ が選ばれる確率は $u_i(t)/\sum_j u_j(t)$ となる。

PR モデルでは緊急性 $u_i(t)$ を解析的に導出することで注文の寿命の冪分布の再現を試みた。まず、1人のエージェントが同時に複数の注文発注を考えるのを許容すると緊急性の計算が煩雑になるので、以下のようにエージェントの行動を簡略化した。エージェントに N 状態(板上に自分の指値注文が無い)、L 状態(板上に自分が指値注文が残っている)の区分を与え、N エージェントは指値/成行、L エージェントはキャンセル注文しか出さないものとし、緊急性も $u^{LM}(=1)$ と $u^C(\tau_i(t))$ と異なる数式を用いることとする。N 状態の緊急性を定数とした理由は2つあり、指値/成行注文とキャンセル注文の比率のみに着目したことと、N 状態では指値/成行は確率 $q_L$ 、 $q_M$ で出し分けるのみ、注文内容は不定であるので計算する理由が無いことである。L 状態の緊急性はエージェントが注文を出してから経過時間に依存する関数で決まるとしている。これは忍耐がキャンセルに影響するという考えと、多変数に依存すると解析的に解けないという事情に基づく。

この設定の下、板上の注文の個数や経過時間の分布の時間的安定性を仮定して $u^C(\tau_i(t))$ の解析解を解くと、次のようになる。

$$u^C(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} (N - N_{LOB}^*) \frac{q_L - q_M}{q_L + q_M} \frac{\tau^{-\alpha_C}}{\sum_{\tau=1}^{\tau_{max}} \tau^{-\alpha_C}}$$

$$P(\tau) = \frac{1}{2} - p_C^* \frac{\sum_{\tau=1}^{\tau-1} \tau^{-\alpha_C}}{\sum_{\tau=1}^{\tau_{max}} \tau^{-\alpha_C}} - p_M^* \frac{\sum_{\tau=1}^{\tau-1} \tau^{-\alpha_M}}{\sum_{\tau=1}^{\tau_{max}} \tau^{-\alpha_M}}$$

$$N_{LOB}^* = p_C^* \frac{\sum_{\tau=1}^{\tau_{max}} \tau^{-\alpha_C+1}}{\sum_{\tau=1}^{\tau_{max}} \tau^{-\alpha_C}} + p_M^* \frac{\sum_{\tau=1}^{\tau_{max}} \tau^{-\alpha_M+1}}{\sum_{\tau=1}^{\tau_{max}} \tau^{-\alpha_M}}$$

式の詳細についての説明は省略する。

得られた解析解を用いてシミュレーションを行うと、キャンセル寿命の冪分布は綺麗に再現することが出来たが約定寿命の冪分布に関しては、寿命が大きい領域では再現することが出来たが小さい領域では冪分布より少ない頻度の注文しか観測されなかった。即ち、指値注文がだされてからすぐに成行注文によって約定するような展開が現実の市場と比べて少ないということである。

### 3.2 DREC-2 モデル

そこで、市場に出されてから短時間で注文が約定されるという動きをもたらすトレーダーの行動性質を考察し、それをモデルに導入することを考える。

短時間による約定を引き起こすメカニズムとして、指値注文が最良気配値を更新すると、それによって成行注文で得られる利益が増加、成行注文が出され易くなり、その指値注文が結果として短時間で約定されるというような流れが考えられる。これが人工市場において再現されるには、エージェントが最良気配値を意思決定に用い、取引を行う際にその利益を計算出来ること、PR モデルと異なり指値/成行注文の使い分けが単純な確率的選択ではなくそれらに依存することが必要である。

それを達成する為、各エージェントに予約価格  $P_{res}^i(t)$  を与え、時間変化させる。予約価格とは 1 取引単位だけ金融商品を買った(売った)場合に自身の総資産の価値が変化しない価格のことであり [11]、これより安く(高く)買う(売る)ことが出来ればその分だけ総資産が増える、即ち利益を得られるということになる。その意味で予約価格は本人が思っている金融商品の本質的価値、ファンダメンタルに近いとは言えるが、自分のポジション等にも依存し、また安全マージンを取って買いと売りの予約価格が異なることもあり得る。

エージェントに予約価格を設定したことによって成行注文を出した時の利益が最良気配値との差を取ることによって計算可能になり、N エージェントが指値と成行注文を使い分ける為の基盤が整った。リアリティに極限まで拘るならば、価格の流れや板の状態から指値注文の価格と予期される待ち時間の関係を推測し、それらと比較した上で成行注文発注の妥当性を考えることになるが、これは煩雑に過ぎる。本研究では指値注文の価格は PR モデルと同様冪分布に従ったランダムのままとし、指値/成行注文の確率を成行注文の利益によって変化させるのみとする。即ち、次のように注文を出すとする。その時刻に注文を出すエージェントとして N 状態のそれが選ばれた時、彼の予約価格がスプレッド内であれば、成行注文では決して利益を得られないのだから必ず指値

注文を出す。予約価格が最良売り気配値より高い場合は、エージェントが金融商品の価値を高く見ているので買い注文を出すものとし、成行注文の選択確率は予約価格と最良気配値の差  $x$  に対する増加関数であるとする。増加関数と仮定する理由は、 $x = 0$  では成行注文の利益が 0 である為成行注文の確率 0、 $x \rightarrow \infty$  では指値注文と成行注文の利益差が消失する、即ち約定速度のみ問題となるので成行注文の確率 1 となることからである。予約価格が最良買い気配値より低い場合も売買方向は逆で同様に設定する。これを視覚的に表すと図 1 のようになる。

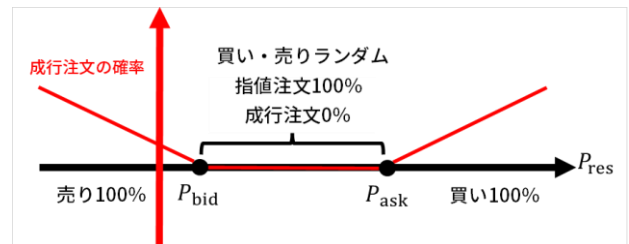


図 1 N エージェントの行動の視覚的表現

またキャンセルも経過時間のみに依存するのではなく、利益と約定速度のトレードオフを組み込むこととする。即ちキャンセルの緊急性を

$$v^c(\tau) = w_{DR} w_{EC} u^c(\tau)$$

という式に改める。 $w_{DR}$  及び  $w_{EC}$  はそれぞれ約定までの時間、利益の効果を表している。

$w_{DR}$

$$= \begin{cases} \exp \left[ \frac{P_{ask}^i - P_{mid}(t)}{P_{ask}^i - P_{mid}(t_0)} - 1 \right] & (\text{売り注文の場合}) \\ \exp \left[ \frac{P_{mid}(t) - P_{bid}^i}{P_{mid}(t_0) - P_{bid}^i} - 1 \right] & (\text{買い注文の場合}) \end{cases}$$

$$w_{EC} = \begin{cases} \exp \left[ 1 - \frac{P_{ask}^i - P_{res}^i(t)}{P_{ask}^i - P_{res}^i(t_0)} \right] & (\text{売り注文の場合}) \\ \exp \left[ 1 - \frac{P_{res}^i(t) - P_{bid}^i}{P_{res}^i(t_0) - P_{bid}^i} \right] & (\text{買い注文の場合}) \end{cases}$$

この数式の意味は次のようになる。1 つ目の式は指値注文を出した当初と比べ約定までにかかる時間の見込みが増加しているならばキャンセルの緊急性を上げる、減少しているならば下げる効果を表している。エージェント  $i$  が出している売り(買い)注文の価格を  $P_{ask}^i(P_{bid}^i)$  とし、それと板の中価格との距離の変化によって約定までの見込み時間の変化を表現している。2 つ目の式は自分の注文が約定した際の利益が指値注文を出した当初と比べ増加しているならばキャンセルの緊急性を下げ、減少しているならば上げる効果を表している。利益に関しては自分の注文

の価格と予約価格の差によって表現している。

以上により利益と約定速度を考慮した注文行動を行うエージェントベースモデルの枠組みは完成した訳だが、シミュレーションを実行するにはまだ2つ決定しなければならないことがある。予約価格の時間発展の数式と、最良気配値と予約価格の差に対する成行注文の選択確率の増加関数の具体的形状である。

前者に関しては、本研究では

$$P_{\text{res}}^i(t+1) = P_{\text{res}}^i(t) + b(P(t) - P_{\text{res}}^i(t)) + \sigma \varepsilon_i(t)$$

を用いる。予約価格の時間発展を最終約定価格へ近づく・離れる項とランダム項の和でモデル化している。尚、式中の $b$ は2つのパターンで計算する。1つは定数で、もう1つは時刻、エージェント毎に異なる値を取る乱数であり

$$b = 1 - \Lambda(m, s^2)$$

によって表現される。ここで $\Lambda(m, s^2)$ は対数正規分布である。 $\varepsilon_i(t)$ は $N(0,1)$ に従う乱数である。

後者に関しては、遺伝的プログラミングを用いて生成するものとする。 $x=0$ で0、 $x \rightarrow \infty$ で1になる増加関数であるから、この要件を満たす為に $f(x)/\{f(x)+10\}$ の $f(x)$ を $x=0$ で0、 $x \rightarrow \infty$ で $\infty$ になるように生成する。関数の値域を変更したのは計算の都合である。このようにすることによって、正数

$x$ に対して $+$ 、 $\times$ 、 $\sqrt{\quad}$ 、 $\log(x+1)$ の4つの演算をどのように組み合わせて $f(x)$ を生成しても値域が条件を満たすようになる。指数関数 $e^x$ も数学的には条件を満たすが、数値計算上では発散し易い為今回は使用しない。

ここで遺伝的プログラミングを用いる意味は、予約価格の更新式の多様性を吸収する為である。現実世界で市場参加者の予約価格を観測することは不可能、従ってその更新式のモデル化の仕方も無数に考えられる。更新式の違いに応じて人工市場が適切に動作する成行注文の選択確率の増加関数の形状も変化すると想定し、2つの数式を同時に変更するのではなく、1つのみ変更しもう1つはそれに応じて遺伝的プログラミングで生成することで条件を満たす人工市場モデルの構築を容易にしている。

#### 4. シミュレーション結果

パラメータはエージェント数 $N=300$ 、注文の経過時間の最大値 $\tau_{\text{max}}=8.01 \cdot 10^6$ 、再現すべき注文の寿命の冪分布を $\alpha_C=2.1$ 、 $\alpha_M=1.5$ とし、1つの人工市場モデルの計算は100万時間ステップ実行する。遺伝的プログラミングは50個体の計算を5世代行う。これは個体数、世代数共にかなり少ないが、値

域の分かっている単調増加関数というかなり条件の限定された関数の生成に用いる為、1つ1つの個体が人工市場であり計算量を要求することからこのように設定した。ランダム生成される木の深さ上限は4で、初期解候補はramped half-and-halfで生成し、新世代は交叉70%、突然変異20%、再生産10%で生成する。

その結果、予約価格更新式中の $b$ が定数の時には注文の寿命の冪分布の再現に失敗したが、乱数の場合にはキャンセル、約定寿命共に指数含めその再現に成功した。それを図2、3に示す。

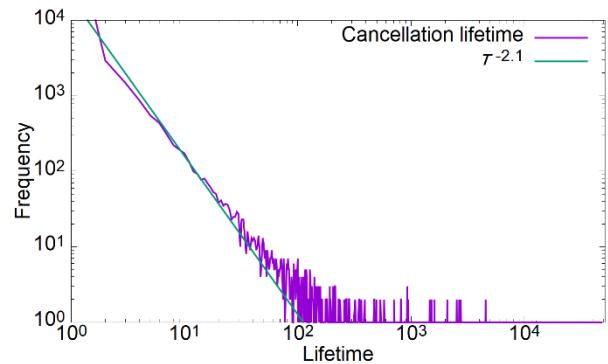


図2 シミュレーションのキャンセル寿命の分布

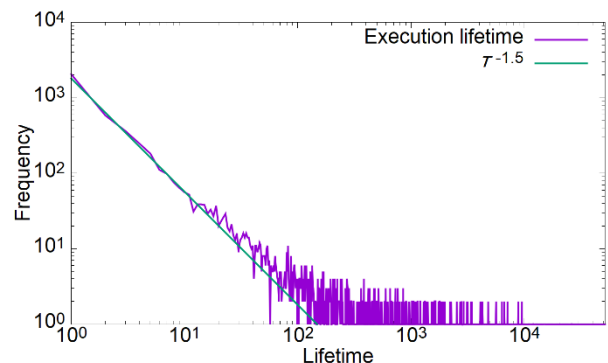


図3 シミュレーションの約定寿命の分布

尚、この時遺伝的プログラミングによって生成された数式は $f(x) = 90 \times 0.3 \times \sqrt{\log(x+1)} + 40$ であった。これを用いた場合、 $N$  エージェントは成行注文が可能である場合には高い確率で出すということになる。図2、3を得た際のパラメータは $m=0.99$ 、 $s=0.25$ 、 $\sigma=1$ である。

#### 5. 考察

$N$  エージェントの成行注文の選択確率の増加関数を生成する解の任意性が高い遺伝的プログラミングで生成したにも関わらず予約価格の更新式の内容如

何によっては寿命の冪分布を再現出来ないということは、N エージェントが指値注文と成行注文の両方が選択可能な時にどう判断するかよりも、そもそも成行注文で収益を上げられる状態がいつ、どのように発生するかの方が重要であるということを意味している。しかしながら本研究では予約価格が具体的にどのような性質を持っていれば寿命の冪分布の再現に十分であるか、その条件の特定には至っていない為、それは今後の課題である。

予約価格更新式が理由で寿命分布が再現出来なかった場合に起きていたことを以下述べる。シミュレーションのパラメータや遺伝的プログラミングの適合度関数におけるキャンセル寿命と約定寿命の重み付けによってキャンセル寿命、約定寿命のどちらが再現出来なかったのかは異なっていたが、キャンセル寿命が1ばかり、即ち指値注文とそれに対するキャンセル注文がずっと交互に繰り返されていたり、市場において約定が殆ど起きず、分布がそもそも描けないということが起きていた。これは指値、成行、キャンセル注文の3つが、エージェントの意思決定により選択され時間的に競合する形で市場に出されるモデル特有の現象だと思われる。エージェントの行動の結果として市場の状態が決まり、それが今度はエージェントの行動を左右するモデルで、エージェントの行動の自由度が高い場合には正常に動くモデルを得ることも容易でないということを示している。遺伝的プログラミング等の機械学習によってエージェントの行動規則を生成させる場合においても、正常に動くモデルが少なければ探索・搾取が上手く機能しないこともあり得る。エージェントの行動にどの程度制限を与えどの程度自由を与えるかは今後のモデル構築においても重要である。実際、本研究でも計算した時間ステップ数に比して観測された約定回数が少なく、基本的な市場のダイナミクスを捉え切れていない節がある(これは出した直後にキャンセルされた指値注文の多さが一因である)。

## 6. 結論

本研究では予約価格を導入し、エージェントが自分の注文が約定した際の利益と約定までにかかるであろう時間のトレードオフ関係を意識して指値、成行、キャンセル注文を出すモデルを構築することによって、キャンセル注文によるものだけでなく約定によって市場から消えた注文の寿命の冪分布も指数含めて再現することに成功した。その際に予約価格の時間発展が重要であることは分かったが、具体的に予約価格が満たすべき条件の特定には至らなかった。

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP19J12283 の助成を受けた。

## 参考文献

- [1] Vuorenmaa, T. A., & Wang, L. (2014). An agent-based model of the flash crash of may 6, 2010, with policy implications. Available at SSRN 2336772.
- [2] Challet, D., & Stinchcombe, R. (2003). Limit order market analysis and modelling: on a universal cause for over-diffusive prices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 324(1), 141-145.
- [3] Mizuta, T., Hayakawa, S., Izumi, K., & Yoshimura, S. (2013, September). Simulation study on effects of tick size difference in stock markets competition. In *International Workshop on Agent-based Approaches in Economic and Social Complex Systems*(Vol. 2013).
- [4] Mizuta, T., Matsumoto, W., Kosugi, S., Izumi, K., Kusumoto, T., & Yoshimura, S. (2014, March). Do dark pools stabilize markets and reduce market impacts? Investigations using multi-agent simulations. In *Computational Intelligence for Financial Engineering & Economics (CIFER), 2104 IEEE Conference on*(pp. 71-76). IEEE.
- [5] Bartolozzi, M. (2010). A multi agent model for the limit order book dynamics. *The European Physical Journal B*, 78(2), 265-273.
- [6] Mike, S., & Farmer, J. D. (2008). An empirical behavioral model of liquidity and volatility. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(1), 200-234.
- [7] Gu, G. F., & Zhou, W. X. (2009). Emergence of long memory in stock volatility from a modified Mike-Farmer model. *EPL (Europhysics Letters)*, 86(4), 48002.
- [8] Zhou, J., Gu, G. F., Jiang, Z. Q., Xiong, X., Chen, W., Zhang, W., & Zhou, W. X. (2017). Computational experiments successfully predict the emergence of autocorrelations in ultra-high-frequency stock returns. *Computational Economics*, 50(4), 579-594.
- [9] 吉村勇志, 陳昱(2007), 能動性キャンセルを含む人工市場によるキャンセル寿命の冪分布の再現, 第19回人工知能学会金融情報学研究会
- [10] Yoshimura, Y., Okuda, H., & Chen, Y. (2020). A mathematical formulation of order cancellation for the agent-based modelling of financial markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 538, 122507.
- [11] Avellaneda, M., & Stoikov, S. (2008). High-frequency trading in a limit order book. *Quantitative Finance*, 8(3), 217-224.