

効率的な Deep Hedging のためのニューラルネットワーク構造

Neural Network Architecture for Efficient Deep Hedging

今木 翔太^{1*} 今城 健太郎² 伊藤 克哉² 南 賢太郎² 中川 慧³
Shota Imaki, Kentaro Imajo, Katsuya Ito, Kentaro Minami, Kei Nakagawa

¹ 東京大学理学系研究科物理学専攻

¹ Department of Physics, The University of Tokyo

² 株式会社 Preferred Networks

² Preferred Networks, Inc.

³ 野村アセットマネジメント株式会社

³ Nomura Asset Management Co., Ltd.

Abstract: Deep Hedging [1] は、深層学習を用いて、不完全市場でのオプションの最適ヘッジ戦略を計算する汎用的な枠組みである。しかし、最適ヘッジ戦略は過去のヘッジ行動に依存するため、訓練が難しい。この課題を解決するため、我々は、No-Transaction Band 戦略のアイデアを活用する。No-Transaction Band 戦略は、指数型効用関数のもとでヨーロッパ・オプションをヘッジする最適戦略として知られる。我々は、この戦略がより一般の効用関数・エキゾチックを含む幅広いオプションに対しても最適ヘッジであることを証明する。この結果に基づき、我々は No-Transaction Band ネットワークを提案する。このネットワークは、過去のヘッジ行動をニューラルネットのインプットに使用せず、No-Transaction Band を出力する。そのため、高速な訓練が可能となり、かつ理論的結果により最適ヘッジ戦略をより正確に求めることが期待できる。数値実験の結果、ヨーロッパ・オプションおよびルックバック・オプションに対し、我々のネットワークが通常の順伝播型ニューラルネットより高速に、より優れたヘッジ戦略を実現することを示した。

1 はじめに

オプションのヘッジは、数兆ドル規模といわれるデリバティブ産業において不可欠な取引である。完全市場（つまり、取引コストなどの摩擦のない市場）においては、ブラック・ショールズの複製ポートフォリオ [2] を構築することで最適ヘッジができる。しかし、完全市場ではオプション価格の「Catch-22」として知られる逆説的な状況が生まれる [3]。これは、ブラック・ショールズモデルの前提が満たされるならオプションは冗長であり、前提が満たさないなら価格付けが正しくできないという、ブラック・ショールズモデルのジレンマを指す。実際の市場は常に摩擦、とりわけ取引コストの存在によってこのジレンマが解消される一方で、これによって最適ヘッジ戦略の構成がはるかに困難になる。

取引コストの存在下でのオプションの研究は [4] にさかのぼる。[4] は、ブラック・ショールズの複製ポートフォリオを離散的にリバランスするポートフォリオに拡張し、その後 [5] は、平均分散の意味で最適ヘッジ

を求めた。「最適」ヘッジの概念は、無差別効用価格付けの枠組みにより明確になった [6, 7]。この枠組みに基づき、多くの研究が最適ヘッジを追求してきた [8, 9]。

そのなかでも、[1] は、深層学習を用いて不完全市場でのオプションの最適ヘッジ戦略を計算する汎用的な枠組みである Deep Hedging を提案した。これは深層学習の高い表現力 [10] および最適化アルゴリズム [11] によって、最適ヘッジを達成することを狙いとする。実際、取引コストの存在下でのヨーロッパ・オプションのヘッジ戦略に関する数値実験は、この枠組みの効率性とスケーラビリティを示している。

このように Deep Hedging は有効であるものの、最適ヘッジ戦略は過去のヘッジ行動に依存するため、訓練が困難であるという問題がある。つまり、次時刻の最適なヘッジ行動が現在以前のヘッジ行動に依存するため、ニューラルネットの訓練が難しい。実際、我々が数値実験で示すように、ナイーブに設計したニューラルネットでは、大量の訓練を経ても収束しないことが確認できる (図 4, 6)。

そこで、本研究では、Deep Hedging よりも効率的に訓練でき、かつより広い設定で最適ヘッジ戦略を達成

*連絡先：東京大学理学系研究科物理学専攻 原子核理論研究室
東京都文京区本郷 7-3-1
E-mail: shota.imaki.0801@gmail.com

する方法論を開発すべく、No-Transaction Band 戦略に着目する。この戦略は、ヘッジ比率の許容幅 (No-Transaction Band) 内では取引を控えることで、不要な取引を抑え、取引コストを節約する。また、この戦略は指数型効用関数のもとでヨーロッパ・オプションをヘッジする最適戦略としても知られる [3]。

本研究は、これを利用した効率的な Deep Hedging のための No-Transaction Band ネットワークを提案する。このネットワーク構造は、Deep Hedging と比べて二つの特徴がある。第一に、No-Transaction Band ネットワークは、人間のトレーダーが用いるであろう様々な情報を用いることができる一方で、現在までのヘッジ行動をインプットに使用しない。これにより、前述の訓練の困難を回避し、効率的にヘッジ戦略を求めることができる。第二に、No-Transaction Band ネットワークは No-Transaction Band 戦略を出力する。我々はこの戦略が、指数型効用関数のもとでのヨーロッパ・オプションだけでなく、より一般の効用関数や、エキゾチックを含む幅広いオプションに対しても最適ヘッジであることを証明する。この結果は、No-Transaction Band を出力するニューラルネットを用いることで、最適ヘッジを達成できることを示唆する。No-Transaction Band ネットワークは、図 2 のように、任意のニューラルネットにある層を一層加えるだけで実装できる。

さらに、数値実験により、No-Transaction Band ネットワークが、エキゾチックを含むオプションに対し、通常のネットワーク構造に比べてより早くより優れたヘッジ戦略を実現することを示す。

本論文の構成は次の通りである。まず、第 2 章でオプションのヘッジ最適化問題を定式化する。次に、第 3 章では、Deep Hedging がどのように深層学習でヘッジ戦略を最適化するか説明し、訓練の難しさを指摘する。第 4 章で No-Transaction Band ネットワークを提案し、これが Deep Hedging における訓練の難しさを軽減する理由を説明する。第 5 章では、エキゾチックを含むオプションに対して数値実験を行い、No-Transaction Band ネットワークが高速に優れたヘッジ戦略を実現することを示す。最後に結論を述べる。

2 オプションのヘッジ最適化問題

本章では、市場の取引コストおよびオプションを説明し、オプションのヘッジ最適化問題を定式化する。

離散時間 $t \in \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ に取引可能な資産 $S = \{S_{t_i} | S_{t_i} > 0\}_{0 \leq t_i \leq T}$ からなる市場を考える。本研究では、資産価格ダイナミクスとして幾何ブラウン運動を仮定する。

$$\Delta S_{t_i} = \sigma S_{t_i} \Delta W_{t_i} \quad (1)$$

ここで $\Delta S_{t_i} \equiv S_{t_{i+1}} - S_{t_i}$ であり、 ΔW_{t_i} は i.i.d. の標準正規分布である。エージェントの各時刻における資産の保有単位を $\delta = \{\delta_{t_i} | \delta_{t_i} \in \mathbf{R}\}_{0 \leq t_i \leq T}$ で表す。ただし、 δ_{t_i} は時刻 t_i より過去に入手できる情報から決定する。また、無リスク利子はゼロとする。

取引には、取引額に対し割合 c の取引コストがかかるとする。つまり、時刻 t_i までに支払う累積コスト $C_{t_i}(S, \delta)$ は $C_0 = 0$ および $\Delta C_{t_i} = c S_{t_i} |\Delta \delta_{t_i}|$ をみたとす。

資産 S のオプション Z は、満期 $t = T$ に、資産価格の経路に依存するペイオフ $Z(S)$ を払い出す。のちの数値実験では、ヨーロッパ・オプション $Z(S) = \max(S_T - K, 0)$ およびルックバック・オプション $Z(S) = \max(\max(S) - K, 0)$ を扱う。

オプションのディーラーは、顧客にオプションを販売し、ペイオフを支払う義務を負う。ディーラーは原資産を売買してこのリスクをヘッジする。その結果、満期におけるディーラーのポートフォリオは次の確率変数でかける。

$$P(-Z, S, \delta) = -Z(S) + (\delta \cdot S)_T - C_T(S, \delta) \quad (2)$$

$$(\delta \cdot S)_T \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{t_i} \Delta S_{t_i}$$

各項は、顧客へのペイオフの支払い、原資産の価格変動による損益、取引コストを表す。ディーラーは、確率的なポートフォリオ (2) を効用関数 u について最適化する。すなわち、ヘッジ戦略 δ により、期待効用のマイナスで与えられる次の損失関数の最小化を目指す。

$$\ell(\delta) = -\mathbf{E}[u(P(-Z, S, \delta))] \quad (3)$$

のちの数値実験では、リスク回避度 1 の指数型効用関数 $u(x) = -\exp(-x)$ を扱う。

3 Deep Hedging

本章では、Deep Hedging [1] がいかに深層学習を用いて最適ヘッジ戦略を追求するか説明し、最適ヘッジ戦略の訓練が難しい原因を指摘する。

Deep Hedging の着想は、ヘッジ戦略 δ をニューラルネットで表現することである。[1] の提案するネットワークは、現在のヘッジ行動をインプットに用いる。

$$\delta_{t_{i+1}} = \text{NN}(I_{t_i}, \delta_{t_i}) \quad (4)$$

模式図を図 1 に示す。ここで NN は順伝播型ニューラルネット、 I_{t_i} は時刻 t_i 以前に入手できるヘッジに有用な情報の集合を表す。たとえば、価格が幾何ブラウン運動に従う資産のヨーロッパ・オプションの場合、 $I_{t_i} = \{S_{t_j}, t_j\}$ などが該当する。ニューラルネットの普

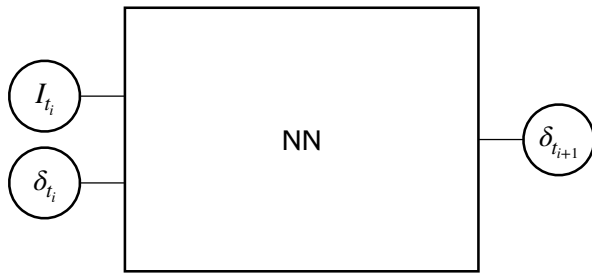


図 1: 順伝播型ニューラルネットワーク

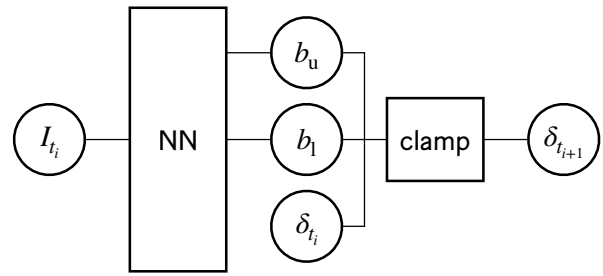


図 2: No-Transaction Band ネットワーク

逼近定理 [10] は、十分な数のパラメータをもつニューラルネットワーク表現 (4) が最適ヘッジ戦略をよく近似できることを示唆する。それゆえ、資産価格のシミュレーションを多数回行い、損失関数 (3) を最小化すべくニューラルネットワークのパラメータを調整すれば、最適に近いヘッジ戦略が得られると期待できる。

ところが、実際には、Deep Hedging におけるニューラルネットワークの訓練は難しい。なぜなら、ニューラルネットワーク (4) の入力値が現在のヘッジ行動 δ_{t_i} を含むためである。実際、第 5 章の数値実験で、ナイーブに実装したニューラルネットワークは、大量の訓練を経ても収束しないことが確認できる。

4 提案手法

本章では、No-Transaction Band ネットワークを提案し、この構造が訓練を効率化する理由を説明する。さらに、広いクラスの効用関数・エキゾチックを含むオプションに対して、No-Transaction Band 戦略が最適ヘッジとなることを証明する。

4.1 ネットワーク構造

No-Transaction Band ネットワークの構造は単純である。ニューラルネットワークは区間 $[b_l, b_u]$ を出力し、現在のヘッジ比率をこの区間に収めることで次時刻のヘッジ比率を得る。

$$\begin{aligned} (b_l, b_u) &= \text{NN}(I_{t_i}) \\ \delta_{t_{i+1}} &= \text{clamp}(\delta_{t_i}, b_l, b_u) \end{aligned} \quad (5)$$

模式図を図 2 に示す。ここで、`clamp` は次の関数である。

$$\text{clamp}(\delta_{t_i}, b_l, b_u) \equiv \begin{cases} b_l & \text{if } \delta_{t_i} < b_l \\ \delta_{t_i} & \text{if } b_l \leq \delta_{t_i} \leq b_u \\ b_u & \text{if } \delta_{t_i} > b_u \end{cases} \quad (6)$$

この戦略では、ヘッジ比率は常に区間 $[b_l, b_u]$ 内に保たれる一方、この区間内では取引を行わない。

No-Transaction Band ネットワークには二つの利点がある。第一に、ニューラルネットワーク (5) の入力値が現在のヘッジ比率を含まないため、前述の訓練の難しさを回避できる。第二に、この構造はヘッジ最適化のための適切な推論バイアスを組み込んでいる。なぜなら、No-Transaction Band を用いる戦略は、十分滑らかな効用関数のもとでペイオフが十分滑らかなオプションをヘッジする最適戦略だからである。最適性の証明は次に与えるが、次のような直感的な理解を述べる。仮に原資産価格が少々変動しても、次の時刻にもとの価格に戻りヘッジが不要になるかもしれないので、ヘッジ比率の許容幅内では取引を控え、取引コストを節約すべきである。従って、No-Transaction Band 戦略が取引コストの存在下で最適戦略となる。

4.2 No-Transaction Band 戦略の最適性

No-Transaction Band 戦略の効率性を正当化するため、[3] の設定 (指数型効用関数の元でのヨーロッパン・オプション) における No-Transaction Band 戦略の最適性を、より広いクラスの効用関数とオプションに対して拡張する。

そのために、次のような損失関数を定義する。

$$\begin{aligned} \ell_{t_i}(-Z; \{S_{t_j}\}_{t_j \leq t_i}, \delta_{t_i}, C_{t_i}) \\ = \inf_{\{\Delta \delta_{t_j}\}_{t_j \geq t_i}} \mathbf{E}[-u(P(-Z, S, \delta)) | \{S_{t_j}\}_{t_j \leq t_i}, \delta_{t_i}, C_{t_i}], \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 u は十分に滑らかな効用関数とする。関数 (7) を最小化する戦略 δ は、損失関数 (7) を最小化することがわかる。この関数 (7) について、次の主張が成り立つ。証明は補遺 A に譲る。

Proposition 4.1 (No-Transaction Band 戦略の最適性). u を十分に滑らかな効用関数、 Z を十分に滑らかなペイオフをもつオプションとする¹。すると、損失関数 (7) は S_t に関して 2 階微分可能である。このとき、 Z の最適ヘッジは No-Transaction Band 戦略によって達成される。つまり、損失関数 (7) を最小化する δ^* は $\delta_{t_{i+1}}^* = \text{clamp}(\delta_{t_i}^*, b_l, b_u)$ によって与えられる。ここで、 b_l と b_u は $b_l \leq b_u$ を満たす $t, \{S_{t'}\}_{t' \leq t}$ の関数である。

5 数値実験

本章では、No-Transaction Band ネットワークが、通常の順伝播型ニューラルネットに比べ、より早くより優れたヘッジ戦略を与えることを、数値実験で実証する。

ヘッジ対象として、最も単純なオプションであるヨーロッパン・オプション (第 5.1 節) および、エキゾチックオプションの例であるルックバック・オプション (第 5.2 節) の二つを扱う。原資産価格は初期値 $S_0 = 1$ 、ボラティリティ $\sigma = 0.2$ の幾何ブラウン運動 (1) に従う。オプションの満期は $T = 30/365$ 、時間ステップは $t = 0, 1/365, \dots, 30/365$ である。取引コスト率 $c = 0$ および $c = e^k$ ($k = -10.00, -9.75, \dots, -5.00$) のそれぞれに対してヘッジ戦略を求め、達成される期待効用を計算した。

ヘッジ方法として、次の三つを比較する。

- (i) **No-Transaction Band ネットワーク** (図 2) : ニューラルネットは 32 ノードの隠れ層 4 層からなり、活性化関数は ReLU 関数である。ニューラルネットの二つの出力それぞれに LeakyReLU 関数を適用し、ブラック・ショールズのデルタに足す・引くことで No-Transaction Band の上限・下限を得る。インプット I_{t_i} はオプションにより異なるので、のちに説明する。
- (ii) **順伝播型ニューラルネット** (図 1) : ニューラルネットは (i) と同様に 4×32 ノードからなり、活性化関数は ReLU 関数である。ニューラルネットの出力に tanh 関数を適用し、ブラック・ショールズのデルタに足して次時刻のヘッジ比率を得る。
- (iii) **取引コストが小さい極限での最適解** : 取引コストが小さい極限で最適ヘッジとなる No-Transaction Band の値が [9] で解析的に求められている。この値を用いた No-Transaction Band 戦略である。

ニューラルネットの訓練は次のように行う。各モンテカルロシミュレーションで、原資産価格の経路を 50,000 通り生成し、各経路についてヘッジレポートフォリオ (2)

を計算する。そして、損失関数 (3) を最小化すべく Adam アルゴリズム [11] でパラメタを最適化する。各オプション・取引コスト率・ヘッジ方法のそれぞれについて、1,000 回のシミュレーションを行う。実験にあたって作成した PyTorch に基づくライブラリは、オープンソースで公開することを予定している²。

5.1 ヨーロピアン・オプション

まず、ヨーロッパン・オプションを扱う。行使価格は $K = 1$ とし、特徴量として対数 Moneyness、満期までの時間、ボラティリティ $I_{t_i} = \{\log(S_{t_i}/K), T - t_i, \sigma\}$ を用いる。

図 3 に示すように、No-Transaction Band ネットワークは、幅広いコスト率にわたり最も高い期待効用を達成する。また、コストがある閾値を超えると期待効用が下げ止まる。これは、No-Transaction Band ネットワークが取引コストが高すぎる場合にヘッジしないことを学習するためであり、この利点は他の手法ではみられない。また、取引コストが小さい領域における No-Transaction Band ネットワークの期待効用は (iii) の解に漸近しており、この領域で最適に近いヘッジ戦略を実現していることが推察できる。

さらに、図 4 の学習曲線が示すように、No-Transaction Band ネットワークの訓練は高速である。通常の順伝播型ニューラルネットが 1,000 回のシミュレーションを経ても収束しない一方、No-Transaction Band ネットワークは 100 回未満のシミュレーションで収束する。

5.2 ルックバック・オプション

次に、ルックバック・オプションを扱う。行使価格は $K = 1.03$ とし、特徴量として対数 Moneyness、満期までの時間、ボラティリティおよび対数 Moneyness の累積最大値 $M_{t_i} \equiv \max\{\{\log(S_{t_j}/K)\}_{t_j \leq t_i}\}$ を用いる。

図 5 に示すように、No-Transaction Band ネットワークは最も高い期待効用を達成する。また、前節 5.1 と同様、No-Transaction Band ネットワークはコストが高すぎる場合はヘッジしないことを学習し、期待効用の減少を抑える。

さらに、図 6 が示すように、No-Transaction-Band ネットワークの訓練は高速である。ルックバック・オプションは、経路依存性がありより多くの特徴量を要する点でヨーロッパン・オプションよりも複雑であるにもかかわらず、同程度の時間で収束することは特筆に値する。このことは、我々の手法が、より多くの特徴量を要する複雑なエキゾチックオプションにも適用できることを示唆する。

¹具体的には、有限のデルタとガンマを持つことを仮定する。

²GitHub: [pfnet-research/pfhedge](https://github.com/pfnet-research/pfhedge)

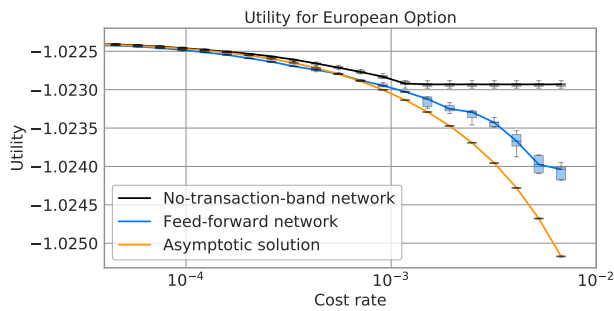


図 3: ユーロピアン・オプションに対する期待効用。20回のシミュレーションで得た期待効用の平均値を示す。誤差は異なる乱数シードの五回の実験から算出した。

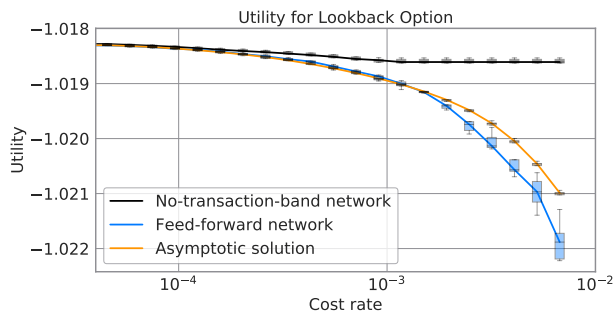


図 5: ルックバック・オプションに対する期待効用。20回のシミュレーションで得た期待効用の平均値を示す。誤差は異なる乱数シードの五回の実験から算出した。

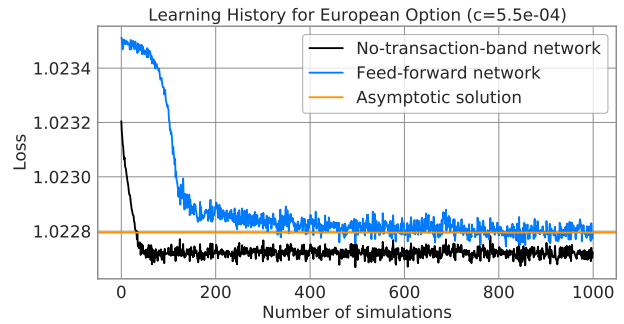


図 4: ユーロピアン・オプションに対する学習曲線。横軸はシミュレーション回数、縦軸は 20 回のシミュレーションで得た損失関数 (3) の平均値を表す。

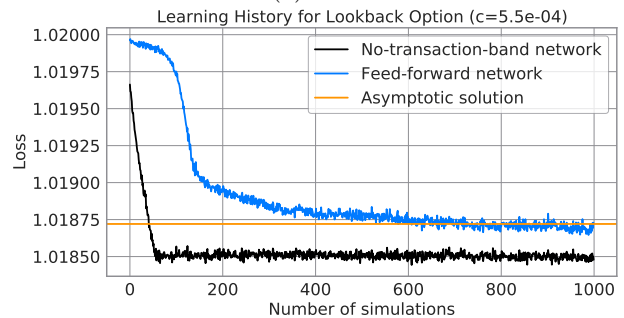


図 6: ルックバック・オプションに対する学習曲線。横軸はシミュレーション回数、縦軸は 20 回のシミュレーションで得た損失関数 (3) の平均値を表す。

6 おわりに

本研究では、シンプルなニューラルネットワークによる効率的なヘッジ戦略のための枠組みである、No-Transaction Band ネットワークを提案した。このネットワークは、インプットに現在までのヘッジ行動を必要とせず、No-Transaction Band を出力するという特徴がある。また、この戦略がより一般の効用関数・エキゾチックを含む幅広いオプションに対しても最適ヘッジであることを証明した。数値実験の結果、ユーロピアン・オプションおよびルックバック・オプションに対し、我々のネットワークが通常の順伝播型ネットワークよりも高速により優れたヘッジ戦略を実現することを示した。

本研究では資産価格ダイナミクスは幾何ブラウン運動としたが、実用のため、ボラティリティ・スマイルや期間構造、確率ボラティリティなどへの拡張が必要である。また、価格が確率ボラティリティに従う資産のオプションのヘッジのため、複数のヘッジ手段を組み込む必要がある。これらは今後の重要な研究課題としたい。

参考文献

- [1] Hans Buehler, Lukas Gonon, Josef Teichmann, and Ben Wood. Deep hedging. *Quantitative Finance*, Vol. 19, No. 8, pp. 1271–1291, 2019.
- [2] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637–654, 1973.
- [3] Mark HA Davis, Vassilios G Panas, and Thaleia Zariphopoulou. European option pricing with transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 31, No. 2, pp. 470–493, 1993.
- [4] Hayne E Leland. Option pricing and replication with transactions costs. *The journal of finance*, Vol. 40, No. 5, pp. 1283–1301, 1985.
- [5] Erik R Grannan and Glen H Swindle. Minimizing transaction costs of option hedging strategies. *Mathematical finance*, Vol. 6, No. 4, pp. 341–364, 1996.

- [6] Stewart Hodges and Anthony Neuberger. Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Review Futures Market*, Vol. 8, pp. 222–239, 1989.
- [7] Vicky Henderson and David Hobson. Utility indifference pricing-an overview. *Volume on Indifference Pricing*, 2004.
- [8] Michael Monoyios. Option pricing with transaction costs using a markov chain approximation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 28, No. 5, pp. 889–913, 2004.
- [9] A Elizabeth Whalley and Paul Wilmott. An asymptotic analysis of an optimal hedging model for option pricing with transaction costs. *Mathematical Finance*, Vol. 7, No. 3, pp. 307–324, 1997.
- [10] Kurt Hornik. Approximation capabilities of multilayer feedforward networks. *Neural networks*, Vol. 4, No. 2, pp. 251–257, 1991.
- [11] Diederik P Kingma and Jimmy Ba. Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint arXiv:1412.6980*, 2014.

3. $A \geq 0, B \geq 0$: このとき、最小は $y_t^{\text{buy}} = 0, y_t^{\text{sell}} = 0$ で得られる。すなわち、何も取引しない (No Transaction) のが最適である。

ここで、 A と B がそれぞれ δ_t に関して単調増加、単調減少であると仮定する。これは損失関数が δ_t に関して凸であるため、小さな c に対しては正当化される。すると方程式 $\pm \partial \ell_t / \partial \delta + c \partial \ell_t / \partial C = 0$ はそれぞれ一つの解を持ち、それを $\delta_t = b_l, b_u, b_l \leq b_u$ とかく。極限 $k \rightarrow \infty$ を考えることにより、 $\delta_{t+\Delta t} = \delta_t + y_t^{\text{buy}} \Delta t - y_t^{\text{sell}} \Delta t = \text{clamp}(\delta_t, b_l, b_u)$ 、つまり $\delta_{t_{i+1}} = \text{clamp}(\delta_{t_i}, b_l, b_u)$ が成立し、No-Transaction Band が最適であることがわかる。

A 最適性の証明

Proposition 4.1 を証明する。時点 t_i での原資産の購入単位・売却単位をそれぞれ $y_{t_i}^{\text{buy}} \Delta t_i \geq 0, y_{t_i}^{\text{sell}} \Delta t_i \geq 0$ で表す。すると、最小化問題 (7) の Δt_i に関する Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式は次のように書ける。

$$\inf_{y_t^{\text{buy}}, y_t^{\text{sell}}} \left(AS_t y_t^{\text{buy}} + BS_t y_t^{\text{sell}} \right) + \frac{\partial \ell_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial S_t^2} = 0, \quad (8)$$

$$A = \frac{\partial \ell_t}{\partial \delta_t} + c \frac{\partial \ell_t}{\partial C_t}, \quad B = -\frac{\partial \ell_t}{\partial \delta_t} + c \frac{\partial \ell_t}{\partial C_t}. \quad (9)$$

ここで $t = t_i$ であり、 Δt の高次の項を無視した。最適なヘッジ比率 δ^* は式 (9) の最小化問題から得られる。いま、 $y_t^{\text{buy}}, y_t^{\text{sell}} \leq k < \infty$ と制限する。[3] と同様の議論から、 $A + B > 0$ であるため、係数 A, B の符号によって次の三つの場合に分けられる。

1. $A < 0, B > 0$: このとき、最小は $y_t^{\text{buy}} = k, y_t^{\text{sell}} = 0$ で得られる。すなわち、可能な限り原資産を購入するのが最適である。
2. $A > 0, B < 0$: このとき、最小は $y_t^{\text{buy}} = 0, y_t^{\text{sell}} = k$ で得られる。すなわち、可能な限り原資産を売却するのが最適である。