

Thompson Samplingを用いた複数ポートフォリオの合成戦略

Multiple Portfolio Blending Strategy with Thompson Sampling

藤島 圭吾^{1*} 中川 慧²
Keigo Fujishima, Kei Nakagawa

¹ 東京大学

¹ The University of Tokyo

² 野村アセットマネジメント株式会社

² Nomura Asset Management Co, Ltd.

Abstract: 平均分散ポートフォリオは、ポートフォリオ構築もしくは資産配分等の目的で実務において最も使用されてきた。しかしながら、パラメータ推定誤差等の問題点のために事後的には平均分散の意味で効率的なポートフォリオとはいえ、実際、リスクベース・ポートフォリオや等ウェイトポートフォリオなどのヒューリスティックな戦略のパフォーマンスがより良好であることは既に広く実証されている。これらのポートフォリオのうち最も効率的と考えられるものを、市場の動向などを鑑みて選択することは一般に困難である。加えて、複数のポートフォリオを効果的に合成することでより安定したパフォーマンスを生み出す方法は、未だ十分に検討されていない。そこで本研究では、複数のヒューリスティックなポートフォリオの選択を多腕バンディット問題とみなし、これらを適切な比重で合成する手法の提案を行う。具体的には、先行研究にて提案された Thompson Sampling を用いて2つのポートフォリオの合成比率を決定する手法を、複数のポートフォリオの合成が可能ないように拡張する。この際、各ポートフォリオのパフォーマンスを定める事前分布として仮定するディリクレ分布に関して、その時間経過に対する妥当性の担保のため、使用する観測データのローリングを行なった。実際に、代表的なベンチマークデータを用いて構築したポートフォリオによる実証分析を行った結果、提案手法は良好なパフォーマンスを示した。

1 はじめに

平均分散ポートフォリオ [1] はポートフォリオ構築もしくは資産配分等の目的で実務において最も使用されてきた。平均分散ポートフォリオでは、各資産の期待リターンとリスク（共分散行列）をインプットとして用い、目標リターンとリスクのトレードオフを最適化する。しかしながら、平均分散ポートフォリオは期待リターンの推定が非常に困難であり [2]、インプットのパラメータ、とくに期待リターンのわずかな変化が結果に大きな影響を与えるため、事後的には平均分散の意味で効率的なポートフォリオではない [2, 3]。

そのため、2008年の金融危機以降、期待リターンを陽に使用せずリスクのみに着目した資産配分の決定手法であるリスクベース・ポートフォリオや等ウェイトポートフォリオといったヒューリスティックな戦略によって資産配分を決定することが提案されている。実際に、それらのパフォーマンスが平均分散ポートフォ

リオや時価加重ポートフォリオよりも良好であることが広く実証されている [4, 5, 6, 7]。

これら複数の基準によって構築されたポートフォリオのうち最も効率的と考えられるものを、市場の動向などを鑑みて事前を選択することは一般に困難である。

また、平均分散ポートフォリオの枠組みにおいては、平均分散の意味で効率的なポートフォリオの2つの線形結合によって、任意の効率的なポートフォリオを表現することが知られている (2 ファンド分離定理) [8]。しかしながら、前述のように平均分散ポートフォリオは事後的には効率的ではなく、複数のポートフォリオを組み合わせることでより効率的なポートフォリオを構築できる余地がある。一方で、複数のポートフォリオを効果的に合成することでより安定したパフォーマンスを生み出す方法は、あまり検討されていない [9]。

そこで本研究では、複数のポートフォリオをアームとみなした最良のポートフォリオの選択を多腕バンディット問題とみなして、これらを適切な比重で合成する手法の提案を行う。多腕バンディットアルゴリズムの代表的なアルゴリズムとして提案されている Thompson Sampling は、バッチ更新にも頑強であることが知ら

*連絡先:

〒167-0035 東京都杉並区今川4-14-13
E-mail: nmthterag277@gmail.com

れており [10], 流動的な市場におけるポートフォリオ選択の最適化にも有用であると考えられる。一方で, Thompson Sampling を行うにあたって, 各アームから得られる報酬の分布を推定し, 各アームの期待値を算出した後, 比較することが必要となるが, これは一般に困難であることが知られており, その解決策として, 各アームのパフォーマンスを定める事前分布を仮定するという手法がよくとられている [11]。実際, 先行研究 [9] では, 等ウェイトポートフォリオと最小分散ポートフォリオの2つのポートフォリオの優劣に対して, 事前分布としてベータ分布を仮定している。本研究ではこれを多変量に拡張して, 任意数のポートフォリオの優劣の事前分布としてディリクレ分布を仮定する。それにより, Thompson Sampling に則って, ディリクレ分布から各ポートフォリオの合成比率として適切な値を算出することが可能となる。こうして得られた比重を用いることで, 任意数のポートフォリオを効率的に合成することができると考えられる。

また, 本研究の提案するポートフォリオのパフォーマンスを検証するため, 代表的なベンチマークデータの1つである Fama and French を用いて実証分析を行う。合成するポートフォリオとしては, 先行研究 [9] で用いられていた最小分散ポートフォリオと等ウェイトポートフォリオに加え, 最小分散ポートフォリオ以外の代表的なリスクベース・ポートフォリオである, リスクパリティ・ポートフォリオ [12], 最小分散度ポートフォリオ [6], ボラティリティ・インバースポートフォリオ [5] を合わせた5つのポートフォリオを構築する。そして, 本研究の提案手法である Thompson Sampling を用いた合成を行うことで, 新たに混合ポートフォリオを構築する。これら6つのポートフォリオの累計パフォーマンスを, ポートフォリオの代表的な評価指標である年率リターンおよびリスク・リターンによって比較した結果, 混合ポートフォリオは非常に良好なパフォーマンスを示す。

2 関連研究

平均分散ポートフォリオを上回る性能を有するポートフォリオを作成するための手法として, 複数ポートフォリオを合成するという戦略はこれまで数多く検討されてきており, その優位性が示されてきた [7]。

例えば, [?] は Stein タイプの縮小推定量の枠組み [13] に基づいて, 推定誤差による悪影響を互いに弱め合うような3つのインデックスファンドを用いてポートフォリオを合成することで, 性能の向上が見込めることを示した。さらに, [14] は等ウェイトポートフォリオや平均分散ポートフォリオなどの複数ポートフォリオを, それらのリターンが互いに独立同分布であることを仮定

した上で, 効用を最大化できるように合成比率を算出することで, 平均分散ポートフォリオを上回るパフォーマンスを実現するポートフォリオが作成可能なことを示した。しかし, [14] の提案する混合ポートフォリオは等ウェイトポートフォリオを常に上回ることはないことが実証された。その後, [15] は多くの経済的基準について, それらとポートフォリオのパフォーマンスの関係性を検討し, 分散の最小化こそが最も頑強な指標となることを示した。

また, [16] は複数ポートフォリオの中から最適なものを選択するという問題を, 多腕バンディット問題として定式化した。これは, ポートフォリオの選択におけるリスクの回避とリターンの追求のトレードオフが, バンディット問題における探索と活用のトレードオフに綺麗に対応しているという点で自然な試みである。実際, 従来の金融工学的手法に対して優位性を持つことが示された。これを踏まえて, [9] は Thompson Sampling を用いたポートフォリオの合成手法を提案した。これは, Thomson Sampling は UCB などのその他のバンディットアルゴリズムに比べて, 余分な探索が少なくなり, 有限の試行回数でより良い性能を達成することができるためであり, 実際, この手法で最小分散ポートフォリオと等ウェイトポートフォリオを合成したところ, FF25 や FF48 などのデータセットに対してその有効性を示した。本研究では, 先行研究 [9] の提案手法を, 複数のポートフォリオを組み合わせることでより効率的なポートフォリオを構築できる余地があると考え, 任意数のポートフォリオの合成が可能に拡張する。

3 提案手法:Thompson Sampling を用いた複数ポートフォリオの合成戦略

この章では, まず論文中で用いる用語やその表式について説明し, 次に本研究で合成する5つのポートフォリオについて説明する。その後, 複数ポートフォリオの合成問題を多腕バンディット問題として定式化し, 合成比率を Thompson Sampling を用いて導出する。

3.1 Notation

本研究では時間間隔を Δt , k ステップ経過後の時点 を $t_k = k\Delta t$ と表すこととする。 Δt としては1時間, 1日, 1ヶ月, 1年などが考えられるが, 本研究では1ヶ月とする。

本研究では, N 個のリスク資産を運用した際に t_{k-1} 時点から t_k 時点までの間に各資産から得られるリター

ンのことを $\mathbf{R}_k = (R_{k,1}, \dots, R_{k,n}, \dots, R_{k,N})^\top$ と表すこととする。 $R_{k,n}$ は n 番目の資産から得られるリターンを表し、その資産 n の t_{k-1} 時点での価格を $S_{k-1,n}$ 、 t_k 時点での価格を $S_{k,n}$ とすると、 $R_{k,n} = S_{k,n}/S_{k-1,n} - 1$ と算出される。

複数の資産の運用戦略やそのための意思決定は、ポートフォリオによって表現できる。本研究では、 N 個のリスク資産に対する t_k 時点でのポートフォリオを、ウェイトベクトル $\omega_k = (\omega_{k,1}, \dots, \omega_{k,n}, \dots, \omega_{k,N})^\top$ によって表す。 $\omega_{k,n}$ は n 番目の資産が総資産に占める割合を表す。このとき、 $\omega_k^\top \mathbf{1} = \sum_{n=1}^N \omega_{k,n} = 1$ がつねに成り立ち、 $\omega_{k,n} > 0$ は n 番目の資産に対してロングポジションであることを意味し、 $\omega_{k,n} < 0$ はショートポジションを意味する。

以上から、ウェイトベクトル ω_k によって構成されたポートフォリオの t_{k-1} 時点から t_k 時点に得られるリターン μ_k は $\mu_k = \mathbf{R}_k^\top \omega_k - 1$ と表せる。また、以降本研究においては、 J 個のポートフォリオのうち最もリターンが大きいポートフォリオを「成功」と表現する。すなわち j 番目のポートフォリオのウェイトを $\omega_{k,j}$ としたときに、

$$\arg \max_j \mu_{k,j} = \mathbf{R}_k^\top \omega_{k-1,j} \quad (1)$$

となるポートフォリオである。

3.2 合成するポートフォリオ

先行研究 [9] では、最小分散ポートフォリオ (MV) と等ウェイトポートフォリオ (EW) の合成を行っている。本研究では、合成するポートフォリオとして、これらに加えて、最小分散ポートフォリオ以外によく使用されるリスクベース・ポートフォリオである、最大分散度ポートフォリオ (MD)、リスクパリティ・ポートフォリオ (RP)、ボラティリティ・インバースポートフォリオ (VI) を加えた5つのポートフォリオを使用する。以下では、各ポートフォリオのウェイトを $w \in \mathbb{R}^N$ 、各要素を $\{\sigma_{ij}\}$ とする共分散行列 $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 、ポートフォリオのリスク $\sigma_P = w^\top \Sigma w$ とする。

MV: 最小分散ポートフォリオ。ポートフォリオのリスク σ_P を最小にするポートフォリオ [4]。

MD: 最大分散度ポートフォリオ。ポートフォリオの分散効果が最も大きくなるポートフォリオで、分散度 $DR = \frac{w_i \times \sqrt{\sigma_{ii}}}{\sigma_P}$ を最大にするポートフォリオ [6]。

RP: リスクパリティ・ポートフォリオ。ポートフォリオのリスク寄与度 $RC_i = \frac{w_i \times MRC_i}{\sigma_P}$ を各資産で均等ににするポートフォリオである [5]。なお、 $MRC_i = \frac{\partial \sigma_P}{\partial w_i}$ で定義される限界リスク寄与である。

IV: 逆ボラティリティ・ポートフォリオボラティリティ σ_{ii} の逆数をウェイトとするポートフォリオ [5]。共分散を 0 としたときの RP と一致する。

EW: 等ウェイトポートフォリオ。全ての資産を均等に保有するウェイトポートフォリオ [7]。

3.3 Thompson Sampling の適用法

Thompson Sampling とは、最も強力なバンディットアルゴリズムの1つであり、各時点において、複数のアームそれぞれを「そのアームから得られる報酬の期待値が最大である確率」で選択するというアルゴリズムである。これを厳密に行うためには、各時点で、全てのアームに対して、そのアームから得られる報酬の分布を推定した上で期待値を算出する。その後、各アームの期待値を比較する必要があるが、これは一般に困難である [10]。これに対し、先行研究 [9] では、2つのポートフォリオのうちいずれが成功であるかという事象を二項分布で表現した上で、2つのポートフォリオのうち一方が成功する確率を定める事前分布としてベータ分布を仮定した。ベイズ統計においてベータ分布は二項分布の共役事前分布である [17]。

本研究ではこの設定を拡張する。すなわち、「 J 個のポートフォリオのうちあるポートフォリオが成功する」という事象を多項分布で表現し、その多項分布に対して、 J 個のポートフォリオのうちあるポートフォリオが成功する確率を定める事前分布としてディリクレ分布を仮定する。ベイズ統計においてディリクレ分布は多項分布の共役事前分布である [18]

I 個の事象に対するディリクレ分布は、 I 個のパラメータ $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_I$ および、各事象の生起確率が $x_1, \dots, x_i, \dots, x_I$ である確率を表す確率密度関数 $P(x_i; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_I) = \prod_{i=1}^I \frac{1}{B(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)} x_i^{\alpha_i - 1}$ によって特徴付けられる。ここで、 α_i は「 i 番目の事象の生起回数 + 1」によって定められるパラメータであり集中度母数と呼ばれる。このとき、 x_i の期待値、すなわち i 番目の事象が生起する確率は $\frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^I \alpha_i}$ であることが知られている [18]。以下ではこのディリクレ分布を用いたポートフォリオの合成法と、ディリクレ分布の更新方法について説明する。

3.3.1 ポートフォリオの合成

本研究では先行研究 [9] と同様に、複数のアームそれぞれを「そのアームから得られる報酬の期待値が最大である確率」で選択するという Thompson Sampling のアルゴリズムを、ポートフォリオの合成において自然に実現する。具体的には、複数のポートフォリオそれ

それを「そのポートフォリオから得られるリターンの期待値が最大である確率」を合成比率として合成する。

先行研究 [9] で 2 種類のポートフォリオを線型結合する形で混合ポートフォリオを生成していたのと同様に、本研究では J 個のポートフォリオ $\omega_{k,1}, \dots, \omega_{k,j}, \dots, \omega_{k,J}$ を、合成比率 $\delta_{k,1}, \dots, \delta_{k,j}, \dots, \delta_{k,J}$ によって次のように線型結合する形で混合ポートフォリオ ω_k^{TS} を合成する。

$$\omega_k^{\text{TS}} = \sum_{j=1}^J \delta_{k,j} \omega_{k,j} \quad (2)$$

ここで、 $\delta_{k,j}$ は t_k 時点における j 番目のポートフォリオの合成比率であり、以下で説明するようにディリクレ分布から決定される。

3.3.2 合成比率の決定

前述したように、合成比率 $\delta_{k,j}$ は、 j 番目のポートフォリオから得られるリターンの期待値が全ポートフォリオ中最大である確率に等しく、その値は、 J 個のポートフォリオのうちあるポートフォリオが成功する確率を定める、集中度母数が $\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_J$ であるディリクレ分布の、 j 番目のポートフォリオが成功する確率 x_j の期待値として次のように決定される。

$$\delta_{k,j} = \frac{\alpha_j}{\sum_{j=1}^J \alpha_j} \quad (3)$$

よって、合成比率 $\delta_{k,1}, \dots, \delta_{k,j}, \dots, \delta_{k,J}$ を決定することは、ディリクレ分布の集中度母数 $\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_J$ を決定することと同値である。次項では、これらの集中度母数を決定する方法を説明する。

3.3.3 ディリクレ分布の初期化・更新

先行研究 [9] では、 t_0 時点ではベータ分布のパラメータ $\alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}$ をともに 1 として初期化してスタートし、その後各時点でベルヌーイ試行を観測することでベータ分布のパラメータを更新する。それに対し、本研究ではディリクレ分布の定義に忠実に、集中度母数を各ポートフォリオの観測期間中に成功した回数 + 1 として定めた。すなわち、 t_0 時点では $\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_J$ を全て 1 としてディリクレ分布を初期化してスタートし、その後 t_k 時点で各ポートフォリオのリターンを観測し、 j 番目のポートフォリオが成功したとき、 t_{k-1} 時点での $\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_J$ に対して α_j に 1 を加算し、

その他には 0 を加算する。

$$i = \arg \max_{j=1, \dots, n} \mu_{k,j} \quad (4)$$

$$\alpha_i \leftarrow \alpha_i + 1 \quad (5)$$

$$\alpha_{j \neq i} \leftarrow \alpha_j + 0 \quad (6)$$

これにより、 α_j はつねに、「その時点までの観測期間中に j 番目のポートフォリオが成功した回数 + 1」を意味することとなる。よってこのような更新を行うことで、 $\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_J$ を集中度母数とするディリクレ分布はつねに、その時点において J 個のポートフォリオのうちあるポートフォリオが成功する確率を定めるディリクレ分布となる。

3.3.4 観測期間のローリング

ディリクレ分布の更新のための観測期間として適切な長さについて考える。どのポートフォリオが成功するかという事象は、直感的には、その時々々の景気などの市場状態に左右されると考えられる。そのため、ディリクレ分布に加味する情報がある程度直近のものに限った方が混合ポートフォリオのパフォーマンスは向上する、と考えるのはごく自然である。例えば、仮に観測期間が長すぎた場合、ディリクレ分布には遠い過去における各ポートフォリオの優劣情報が加味されることになるが、その情報は現在のポートフォリオの優劣とはほぼ無関係であり、現在の混合ポートフォリオのパフォーマンス低下を招き得るのである。本研究では、簡便のため観測期間を一定の長さ $\tau \Delta t$ に定めることとした。すなわち、 t_k 時点でのディリクレ分布の生成に用いるリターンデータを次の τ 個（のうち存在するもの）に絞る。

$$\mathbf{R}_{k-\tau+1}, \dots, \mathbf{R}_k \quad (7)$$

なお、本研究では後の数値実験において、この $\tau \Delta t$ を 10 年とした。より詳細な検討は今後の課題とする。

4 実証分析

4.1 データ

本研究では、Fama and French (FF) データセット [19] と呼ばれるデータを用いる。この FF データセットは公開されている¹。このデータセットにおける FF25 および FF48 データセットを使用する。FF25 データセットは、サイズと BPR (簿価時価比率) に基づいて形成された 25 個のポートフォリオが含まれ、FF48 データセッ

¹https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html

Algorithm 1 Multiple Portfolio Blending with Thompson Sampling

Input: $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_K, \tau, J$

- 1: **for** $k = 1 \rightarrow K$ **do**
 - 2: ディリクレ分布を $\alpha_{1 \leq i \leq n} = 1$ で初期化
 - 3: **for** $t = k - \tau \rightarrow k - 1$ **do**
 - 4: $\omega_{k-1,1}, \dots, \omega_{k-1,J}$ を $\mathbf{R}_{k-\tau}, \dots, \mathbf{R}_{k-1}$ から生成
 - 5: $\mu_{k,j}$ が最大となる i を算出
 - 6: $\alpha_i \leftarrow \alpha_i + 1$
 - 7: $\alpha_{j \neq i} \leftarrow \alpha_i + 0$
 - 8: **end for**
 - 9: ディリクレ分布から合成比率を算出
 - 10: 合成比率を用いて ω_k^{TS} を構築
 - 11: **end for**
- Output:** ω_k^{TS}

トは、さまざまな産業セクター (業種) を表す 48 個のポートフォリオの月次リターンが含まれている。データセットの期間としては、1976 年 5 月から 2021 年 5 月までの月次データを使用する。

4.2 手順

まず、過去 60 ヶ月のデータから共分散行列 Σ を推定し、それに基づいて各ポートフォリオを月ごとに構築する。次に、ローリング期間を 10 年 (120 ヶ月) として、混合ポートフォリオを月ごとに構築する。最後に、以下で説明する評価指標によって、各ポートフォリオのパフォーマンスを評価・比較する。

4.3 評価指標

評価指標として、広く使用されている次の 3 つの指標を使用する。年率リターン (AR) は、ポートフォリオの 1 年間に獲得できる平均リターンを表し、年率リスク (RISK) はポートフォリオのリターンの標準偏差として定義され、リスク・リターン (R/R) は年率リターンを年率リスクで基準化した量で定義される。

$$\text{AR} = \frac{12}{T} \sum_{t=1}^T R_t \quad (8)$$

$$\text{RISK} = \sqrt{\frac{12}{T-1} \times \sum_{t=1}^T (R_t - \mu)^2} \quad (9)$$

$$\text{R/R} = \text{AR/RISK} \quad (10)$$

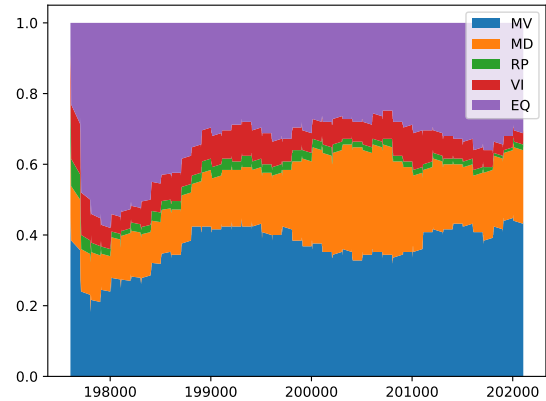


図 1: FF25 における各ポートフォリオの合成比率の推移

ここで、 R_t はポートフォリオのリターンであり、 $\mu = 1/T \sum_{t=1}^T R_t$ である。

4.4 結果

表 1 はそれぞれ、FF25 および FF48 における、各ポートフォリオのパフォーマンスを示す年率リターン (AR)、リスク (RISK)、リスク・リターン (R/R) を表している。各ポートフォリオの種類は 3.1 の項で述べた通りであり、TS は本研究の提案する Thompson Sampling を用いて合成した混合ポートフォリオを表す。

R/R の比較結果から、Thompson Sampling を用いて合成した混合ポートフォリオのパフォーマンスは MV に次いで優れており、非常に良好であることがわかる。ここで注意すべき点として、MV から EW のいずれのポートフォリオも事前にはどれが優れているのかが未知であるという点である。すなわち、優れたポートフォリオが事前には不明瞭な中で、Thompson Sampling を用いて合成を行うことで、最も優れたポートフォリオである (と後から結果的にわかる) ポートフォリオに準じた良好なパフォーマンスを期待できるポートフォリオを合成することに成功しているといえる。これは、Thompson Sampling によるバンディットアルゴリズムが適切に機能していることを示していると考えられる。

図 1,2 はそれぞれ、FF25 および FF48 において混合ポートフォリオを構成するにあたっての、MV, MD, RP, IV, EW それぞれの合成比率の変遷を表している。これらの結果から、時間経過に伴って各ポートフォリオの優位性が変化するのに伴って、各ポートフォリオの合成比率も時事刻々と変動している (すなわち、Thompson Sampling による合成比率の生成アルゴリズムがリアルタイムで機能している) ことがわかる。

表 1: 各ポートフォリオのパフォーマンス

FF25						
	TS (Ours)	MV	MD	RP	IV	EW
AR[%]	13.973	13.543	13.016	14.591	14.667	14.600
RISK[%]	15.774	14.378	16.374	16.920	16.983	17.441
R/R	0.886	0.942	0.795	0.862	0.864	0.837
FF48						
	TS (Ours)	MV	MD	RP	IV	EW
AR[%]	12.490	11.693	11.754	13.220	13.405	13.451
RISK[%]	13.586	11.886	14.439	15.212	15.622	16.299
R/R	0.919	0.984	0.814	0.869	0.858	0.825

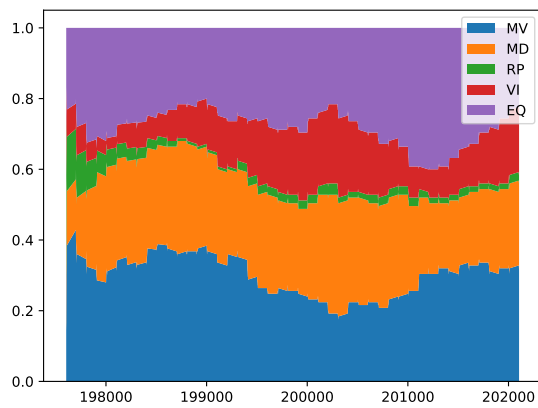


図 2: FF48 における各ポートフォリオの合成比率の推移

5 おわりに

本研究では先行研究 [9] の 2 つポートフォリオの合成手法を J 個に拡張する形で、複数のポートフォリオを効率的に合成し、より頑強なポートフォリオを構築する手法を提案した。具体的には、ポートフォリオの合成問題をバンディット問題として定式化し、各ポートフォリオの過去のリターンデータからディリクレ分布を生成し、そこから Thompson Sampling に則って合成比率を決定する。ベンチマークデータセットを用いた実証分析の結果、提案手法により生成した合成比率は時系列に沿って変動をしており、そこから合成された混合ポートフォリオは、良好なパフォーマンスを示すことが確認できた。今後の課題としては、ディリクレ分布の生成過程において、単なる月次リターンの大小比較をする代わりに、ランキング方式などを導入することでディリクレ分布に加味する情報量を増やし、

より頑強な混合ポートフォリオの構築を目指す。また、ローリング期間として本研究では 10 年を採用したが、機械学習を用いてローリング期間を逐次最適化する手法を提案することが挙げられる。

参考文献

- [1] Harry Markowitz. Portfolio selection. *The journal of finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77–91, 1952.
- [2] Robert C Merton. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of financial economics*, Vol. 8, No. 4, pp. 323–361, 1980.
- [3] Mark Broadie. Computing efficient frontiers using estimated parameters. *Annals of operations research*, Vol. 45, No. 1, pp. 21–58, 1993.
- [4] Roger G Clarke, Harindra De Silva, and Steven Thorley. Minimum-variance portfolios in the us equity market. *The journal of portfolio management*, Vol. 33, No. 1, pp. 10–24, 2006.
- [5] Sébastien Maillard, Thierry Roncalli, and Jérôme Teïletche. The properties of equally weighted risk contribution portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 36, No. 4, pp. 60–70, 2010.
- [6] Yves Choueifaty and Yves Coignard. Toward maximum diversification. *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 35, No. 1, pp. 40–51, 2008.
- [7] Victor DeMiguel, Lorenzo Garlappi, and Raman Uppal. Optimal versus naive diversification: How

- inefficient is the $1/n$ portfolio strategy? *The review of Financial studies*, Vol. 22, No. 5, pp. 1915–1953, 2009.
- [8] James Tobin. Liquidity preference as behavior towards risk. *The review of economic studies*, Vol. 25, No. 2, pp. 65–86, 1958.
- [9] Weiwei Shen and Jun Wang. Portfolio blending via thompson sampling. In *IJCAI*, pp. 1983–1989, 2016.
- [10] Navin Goyal Shipra Agrawal. Analysis of thompson sampling for the multi-armed bandit problem. *Workshop and Conference Proceedings*, Vol. 23, No. 39, pp. 1–26, 2012.
- [11] Lihong Li Olivier Chapelle. An empirical evaluation of thompson sampling. 2011.
- [12] Edward Qian. Risk parity and diversification. *The Journal of Investing*, Vol. 20, No. 1, pp. 119–127, 2011.
- [13] Philippe Jorion. Bayes-stein estimation for portfolio analysis. *Journal of Financial and Quantitative analysis*, Vol. 21, No. 3, pp. 279–292, 1986.
- [14] Jun Tu and Guofu Zhou. Markowitz meets talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. *Journal of Financial Economics*, Vol. 99, No. 1, pp. 204–215, 2011.
- [15] Victor DeMiguel, Alberto Martin-Utrera, and Francisco J Nogales. Size matters: Optimal calibration of shrinkage estimators for portfolio selection. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 37, No. 8, pp. 3018–3034, 2013.
- [16] Weiwei Shen, Jun Wang, Yu-Gang Jiang, and Hongyuan Zha. Portfolio choices with orthogonal bandit learning. In *Twenty-fourth international joint conference on artificial intelligence*, 2015.
- [17] William M Bolstad and James M Curran. *Introduction to Bayesian statistics*. John Wiley & Sons, 2016.
- [18] Man-Lai Tang Kai Wang Ng, Guo-Liang Tian. *Dirichlet and Related Distributions: Theory, Methods and Applications*. John Wiley & Sons, 2011.
- [19] Fama Eugene and Kenneth French. The cross-section of expected stock returns. *Journal of Finance*, Vol. 47, No. 2, pp. 427–465, 1992.