

GA と相関係数による動的選択アセットで構成される ポートフォリオの最適化

Dynamic Asset Portfolio Optimization by a GA Based on Correlation Coefficients

折登 由希子^{1*} 山本 久志² 井ノ口 学² 下田 雅³ 伊呂原 隆³
Yukiko Orito¹, Hisashi Yamamoto², Manabu Inoguchi²,
Tadashi Shimoda³ and Takashi Irohara³

¹ 足利工業大学 ² 首都大学東京 ³ 上智大学

¹ Ashikaga Institute of Technology ² Tokyo Metropolitan University
³ Sophia University

Abstract: The portfolio optimizations are generally to determine the proportion-weighted combination in the static asset portfolio. It means that the assets included in the portfolio have already been given before the optimizing process. However, it is hard to determine the proportion-weighted combination for the optimal portfolio consisting of the static large number of assets. In order to avoid this problem, we propose a method that optimizes the portfolio consisting of not only the given static assets but also the dynamically selected assets in this paper. Our method consists of the following two steps, Steps A and B. Step A is to move the valuable assets expected to have good influence on the objective function from all assets into the portfolio through a GA. Step B is to remove the less-valuable assets expected to have not-so-good influence on the objective function from the portfolio through a GA. In the numerical experiments, we apply the proposed method to creating the index funds for the Tokyo Stock Exchange.

1 はじめに

Markowitz のモダンポートフォリオ理論 [1] を基礎として発展したポートフォリオの最適化問題は、あらかじめ決められたアセットで構成されるポートフォリオにおいて、任意の運用目標に対してアセットの投資配分比率を決定するという離散の組合せ最適化問題である。このような最適化問題に対して、進化計算法を適用した様々な研究報告がある。Xia et al.[2] は、Markowitz が提唱した平均分散モデルへアセットの算術平均リターンを更新するというプロセスや取引コストを考慮したより現実的なモデルに拡張し、遺伝的アルゴリズム (GA) による最適化を行った。Chang et al.[3] は、アセットの投資配分比率やアセット数を制約とした平均分散モデルに対して、また Lin and Liu[4] は、最少取引量を制約とした平均分散モデルに対して、それぞれ GA による最適化を行っている。一方、Streichert and Tanaka-Yamawaki[5] は、平均分散モデルに対して、局所探索

に 2 次計画法を利用した多目的メテックアルゴリズムの有効性の検証をしている。しかしながら、これらの研究においては、ポートフォリオを構成するアセットは最適化手法適用前にすでに固定、もしくは市場からヒューリスティックに選択されており、それら静的に選択されたアセットの投資配分比率を実数型表現で表したポートフォリオに対して最適化手法を適用している。これは、任意の運用目標を有するポートフォリオに対して重要度が高いと考えられるアセットであったとしても、あらかじめ最適化対象アセットとしてリストアップされなかったアセットは、最適なポートフォリオに含まれることはないことを意味する。このため、ポートフォリオへの組み入れ候補となるアセットが多数存在する場合、どのようなアセットを最適化対象アセットとして選択すべきかという問題が存在する。

一方、ポートフォリオへのアセットの選択/非選択の問題に着目した研究として、Orito et al.[6] は、アセット選択/非選択を 1/0 のバイナリ表現とした GA による最適化手法を提案した。また、Aranha and Iba[7] は、アセットの選択/非選択を 1/0 のバイナリ表現、アセッ

*連絡先: 足利工業大学システム情報工学科
〒 326-8558 栃木県足利市大前町 268-1
E-mail: orito@ashitech.ac.jp

トの投資配分比率を実数型表現とした GA による最適化手法を提案している。しかしながら、これらの研究においても、ポートフォリオの組み入れ候補となるアセット数が増加するほど投資配分比率の組合せ数も増加し、探索が困難になるという問題が残る。

そこで本論文では、GA を利用してポートフォリオへの組み入れ候補となる全てのアセットの集合（候補集合）から、ポートフォリオに対して“重要度が高いアセット”をポートフォリオへ移動し、“重要度が低いアセット”をポートフォリオから候補集合へ返却するというアセットの動的選択操作を繰り返すポートフォリオ最適化手法を提案する。本論文で対象とするポートフォリオの最適化問題は、離散の組み合わせ最適化問題であり、目的関数（2章で定義）に対するアセットの重要度を測定することが困難である。そこで、目的関数を導くアセット集合の動的選択に制約を課すことで、アセットの重要度を測定する。提案手法は動的アセット選択によりポートフォリオへの組み入れ候補となる全てのアセットを最適化対象アセットとしてリストアップできると同時に、最適ポートフォリオにとって重要度が高いアセットの投資配分比率だけを決定できるという利点をもつ。

2 ポートフォリオ最適化問題

2.1 記号の定義

ポートフォリオ最適化問題の定式化にあたり、使用する記号とその意味を以下に定義する。

i : アセット i ($i = 1, \dots, N$).

A : 全アセットの集合, $A = \{1, \dots, N\}$.

X : アセットの集合, $X = \{1, \dots, \#X\}$. 但し, $\#X$ は集合 X の要素数を表す。

t : 時点 t ($t = 1, \dots, T$).

$F_{index}(t)$: 時点 t におけるベンチマーク指数。

P_{index} : ベンチマーク指数の変動率, ベクトル $P_{index} = (P_{index}(1), \dots, P_{index}(T))$. 但し, $P_{index}(t)$ は $P_{index}(t) = (F_{index}(t+1) - F_{index}(t)) / F_{index}(t)$ で定義される。

$F_i(t)$: 時点 t におけるアセット i の価格。

P_i : アセット i の収益率, ベクトル $P_i = (P_i(1), \dots, P_i(T))$. 但し, $P_i(t)$ は $P_i(t) = (F_i(t+1) - F_i(t)) / F_i(t)$ で定義される。

w_i : ポートフォリオを構成するアセット i の投資配分比率, $0 \leq w_i \leq 1$. 本論文では、空売りは行わないことを仮定している。

G_X : 集合 X で構成されるポートフォリオ. $\sum_{i=1}^{\#X} w_i = 1$ を満たすようなベクトル $G_X = (w_1, \dots, w_{\#X})$ で表される。

P_{G_X} : ポートフォリオ G_X の収益率, ベクトル $P_{G_X} = (P_{G_X}(1), \dots, P_{G_X}(T))$. 但し, $P_{G_X}(t)$ は $P_{G_X}(t) = \sum_{i=1}^{\#X} w_i \cdot P_i(t)$ で定義される。

2.2 目的関数

本論文では、ベンチマーク指数の挙動へポートフォリオの価格挙動を連動させることを運用目標としたインデックスファンドと呼ばれるポートフォリオを研究対象とする。このインデックスファンドの目的関数として、Orito et al.[8] は任意の期間のベンチマーク指数の変動率とポートフォリオの収益率の2変量から得られる決定係数、Oh et al.[9] はそれら2変量から得られるベータ値を利用した指標を用いている。本論文においては、2変量の正負の相関を判別して捉えるよう、決定係数ではなく以下の相関係数を最大にすることをポートフォリオの目的関数として定義する。

時点 $t = 1$ から $t = T$ におけるベンチマーク指数の変動率を P_{index} , ポートフォリオの収益率を P_{G_X} としたとき、これら2変量の連動の強さを表す相関係数：

$$\max_{X \in A} R_{G_X} = \frac{cov(P_{index}, P_{G_X})}{\sqrt{var(P_{index}) \cdot var(P_{G_X})}} \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^{\#X} w_i = 1 \quad (i \in X)$$

ここで、 $cov(P_{index}, P_{G_X})$ は時点 $t = 1$ から $t = T$ における P_{index} と P_{G_X} の共分散、 $var(P_{index})$ は時点 $t = 1$ から $t = T$ における P_{index} の分散、 $var(P_{G_X})$ は時点 $t = 1$ から $t = T$ における P_{G_X} の分散を表す。

3 動的選択アセットで構成されるポートフォリオの最適化手法

まず、全 N アセットで構成される初期集合を $A = \{1, \dots, N\}$ と定義する。この初期集合 A から、部分集合 $H (\subseteq A)$ と $L (\subseteq A)$ を定義する。本論文では、 H がポートフォリオを構成するアセットの集合を表し、 L がそれ以外のアセットの集合を表す。このため、 H と L の関係として、 $A = H \cup L$ と $H \cap L = \emptyset$ が成り立つ。本論文では以下、 H をポートフォリオ集合、 L を候補集合と呼ぶ。

2章で定義した相関係数を最大にするために、候補集合 L からポートフォリオに対して“重要度の高いアセット”をポートフォリオ集合 H へ移動し、“重要度の低いアセット”をポートフォリオ集合 H から候補集合 L へ返却するというアセット移動とアセット返却の2つの操作手順を繰り返す最適化手法を提案する。ここで、“重要度の高いアセット”とはポートフォリオの相

関係数最大化にプラスの影響を与えるアセット，“重要度の低いアセット”とはポートフォリオの相関係数最大化に影響を与えない、もしくはマイナスの影響を与えるアセットを指す。相関係数を目的関数としたポートフォリオの最適化問題は、離散の組み合わせ最適化問題であり、相関係数に対するアセットの重要度を測定することは困難である。そこで、重要度の高いアセットの選択基準として、2種のアセット集合の和集合から得られるポートフォリオの相関係数はそれぞれの集合から得られる相関係数の最小値以上であるという相関係数の性質を利用し、相関係数を導くアセット集合の動的選択に制約を課すことで、アセットの重要度を測定する。移動・返却対象アセットは、候補集合 L とポートフォリオ集合 H のそれぞれに対して同一の GA を適用することにより選択される。

GA の詳細は 3.1 節に記述する。また、アセットの重要度を測定するための相関係数の性質については 3.2 節に記述し、アセットの選択基準を含む提案最適化手法の詳細は、3.3 節に記述する。

3.1 GA

3.3 節に記述する提案最適化手法におけるアセット移動操作での候補集合 L 、アセット返却操作でのポートフォリオ集合 H のそれぞれに、同一の遺伝子表現、遺伝子操作の GA を適用する。これらの遺伝子表現、遺伝子操作について、集合 X を例として以下に示す。

3.1.1 遺伝子表現

各遺伝子は各アセットの投資配分比率に相当し、遺伝子を列挙した染色体はポートフォリオ $G_X = (w_1, \dots, w_{\#X})$ に相当する。GA の適合度は R_{G_X} で定義された相関係数を最大にすることである。

3.1.2 遺伝子操作

染色体数 S_{pop} で構成される初期染色体集団の生成後、交叉、突然変異を行い新たな染色体を生成する。上述したように本論文の遺伝子座はその並び順に意味を持たないため、一様交叉、一様突然変異を用いる。新たに生成された染色体の各遺伝子は、 $\sum_{i=1}^{\#X} w_i = 1$ となるよう正規化している。また、エリート選択を用いて与えられた最終世代 K まで染色体の選択と淘汰を繰り返す。最終世代 K の染色体集団において適合度最大の染色体を抽出し、 G_{X^*} と表現する。

3.2 移動・返却アセットの選択基準となる相関係数の性質

本論文では、候補集合 L から重要度の高いアセットをポートフォリオ集合 H へ移動する操作を繰り返すことで、移動対象アセットの和集合として構成される H のポートフォリオ G_H の相関係数が高くなることを仮定している。この仮定は、2つの集合 X_a と X_b の和集合 $X_a \cup X_b$ で構成されるポートフォリオの収益率とベンチマーク指数の変動率から得られる相関係数は、それぞれの集合から得られる相関係数の最小値以上であるという以下の性質を利用している。

Property 1.

集合 X_a 、 X_b 、和集合 $X_a \cup X_b$ で構成されるポートフォリオ G_{X_a} 、 G_{X_b} 、 $G_{X_a \cup X_b}$ に対して、ポートフォリオ G_{X_a} への投資配分比率を w ($0 \leq w \leq 1$) とする。このとき、 $R_{G_{X_a}} \geq 0$ 、 $R_{G_{X_b}} \geq 0$ であるならば、次式が成り立つ。

$$R_{G_{X_a \cup X_b}} \geq \min(R_{G_{X_a}}, R_{G_{X_b}})$$

Proof.

式 (1) より、和集合 $X_a \cup X_b$ から得られる相関係数は次式で定義される。

$$R_{G_{X_a \cup X_b}} = \frac{\text{cov}(\mathbf{P}_{index}, \mathbf{P}_{G_{X_a \cup X_b}})}{\sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_{index}) \cdot \text{var}(\mathbf{P}_{G_{X_a \cup X_b}})}} \quad (2)$$

証明中では、簡単のため、 $\mathbf{P}_{G_{X_a}}$ を \mathbf{P}_a 、 $\mathbf{P}_{G_{X_b}}$ を \mathbf{P}_b 、 $\mathbf{P}_{G_{X_a \cup X_b}}$ を $\mathbf{P}_{a \cup b}$ と表記する。

式 (2) は、 $\mathbf{P}_{a \cup b} = w\mathbf{P}_a + (1-w)\mathbf{P}_b$ の性質を満たすため、以下で表現される。

$$R_{G_{X_a \cup X_b}} = \frac{w \cdot R_{G_{X_a}} \sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_a)} + (1-w) \cdot R_{G_{X_b}} \sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_b)}}{w \cdot \sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_a)} + (1-w) \cdot \sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_b)}} \times \frac{w \cdot \sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_a)} + (1-w) \cdot \sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_b)}}{\sqrt{w^2 \text{var}(\mathbf{P}_a) + (1-w)^2 \text{var}(\mathbf{P}_b) + 2w(1-w) \text{cov}(\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b)}}$$

ここで、コーシー・シュワルツの定理、すなわち

$$\sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_a)} \sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_b)} \geq \text{cov}(\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b)$$

から、 $0 \leq w \leq 1$ に対して次式が成り立つ。

$$\frac{w \cdot \sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_a)} + (1-w) \cdot \sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_b)}}{\sqrt{w^2 \text{var}(\mathbf{P}_a) + (1-w)^2 \text{var}(\mathbf{P}_b) + 2w(1-w) \text{cov}(\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_b)}} \geq 1$$

以上より、もし $0 \leq w \leq 1$ 、 $R_{G_{X_a}} \geq 0$ かつ $R_{G_{X_b}} \geq 0$ が満たされるならば、次式が成り立つ。

$$R_{G_{X_a \cup X_b}} \geq \frac{w \sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_a)}}{w \sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_a)} + (1-w) \sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_b)}} R_{G_{X_a}}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1-w)\sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_b)}}{w\sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_a)} + (1-w)\sqrt{\text{var}(\mathbf{P}_b)}} R_{G_{\mathbf{X}_b}} \\
& \geq \min(R_{G_{\mathbf{X}_a}}, R_{G_{\mathbf{X}_b}}) \quad (3)
\end{aligned}$$

式 (3) から、集合 \mathbf{X}_a と \mathbf{X}_b の和集合から得られるポートフォリオの相関係数は、 \mathbf{X}_a と \mathbf{X}_b それぞれから得られるポートフォリオの相関係数の最小値以上になることが証明された。■

3.3 最適化手法

提案最適化手法は、候補集合 \mathbf{L} からポートフォリオ集合 \mathbf{H} への重要度の高いアセットの移動操作と、ポートフォリオ集合 \mathbf{H} から候補集合 \mathbf{L} への重要度の低いアセットの返却操作を繰り返す手法である。本論文では以下、アセットの移動操作を手順 A、返却操作を手順 B と呼ぶ。まず、手順 A、手順 B の繰り返し回数をそれぞれ s_A, s_B と定義する。1 回目のプロセスは $1_A, 1_B$ 、2 回目のプロセスは $2_A, 2_B$ のように、 s の値でプロセスの繰り返し数をカウントする。 s の増加と共に繰り返されるポートフォリオ集合 \mathbf{H} と候補集合 \mathbf{L} を構成するアセットの遷移の様子を、プロセス $s = 1$ から $s = 3$ を例として図 1 に示し、手順 A・B で行われるアセットの移動・返却操作については以下に記述する。

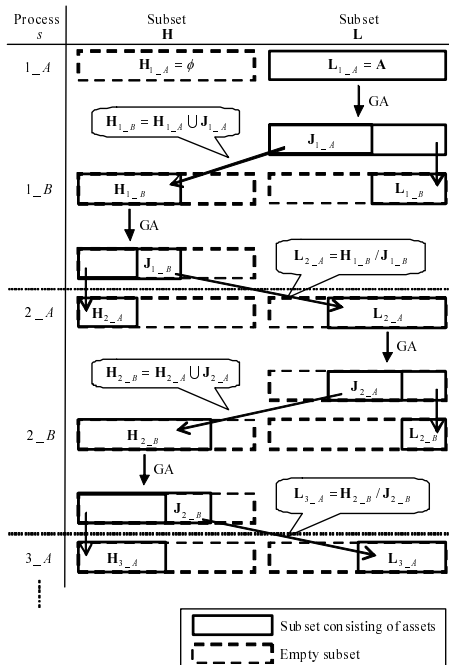


図 1: 提案最適化手法手順 A・B

3.3.1 手順 A (アセット移動操作)

図 1 に示したように初期に \mathbf{L}_{1_A} を集合 \mathbf{A} 、 \mathbf{H}_{1_A} を空集合とする。手順 A は、第 s プロセスにおいて、 \mathbf{L}_{s_A} へ上述の GA を適用し、GA が最終世代 K に到達したとき、適合度最大の染色体 $\mathbf{G}_{\mathbf{L}_{s_A}^*}$ において式 (4) を満たす“重要度の高いアセット”を \mathbf{L}_{s_A} から \mathbf{H}_{s_B} へ移動するというアセットの移動操作を行う。尚、重要度の高いアセットの集合を便宜上 \mathbf{J}_{s_A} と定義する。

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{s_A} &= \{i | w_i \geq A_{bound}, i \in \mathbf{L}_{s_A}, w_i \in \mathbf{G}_{\mathbf{L}_{s_A}^*}\} \\
\mathbf{H}_{s_B} &= \mathbf{H}_{s_A} \cup \mathbf{J}_{s_A} \quad (4) \\
\mathbf{L}_{s_B} &= \mathbf{L}_{s_A} \setminus \mathbf{J}_{s_A}
\end{aligned}$$

ここで、重要度の高いアセットの境界値 A_{bound} は事前に与えられるパラメタである。

式 (4) における集合 \mathbf{H}_{s_A} と \mathbf{J}_{s_A} を上述した Property 1 における集合 \mathbf{X}_a と \mathbf{X}_b にそれぞれ当てはめると、 $R_{G_{\mathbf{H}_{s_A}}} \geq 0, R_{G_{\mathbf{J}_{s_A}}} \geq 0$ であるならば、和集合 $\mathbf{H}_{s_B} (= \mathbf{H}_{s_A} \cup \mathbf{J}_{s_A})$ との間 $R_{G_{\mathbf{H}_{s_A} \cup \mathbf{J}_{s_A}}} \geq \min(R_{G_{\mathbf{H}_{s_A}}}, R_{G_{\mathbf{J}_{s_A}}})$ が成り立つ。このことから、手順 A で作成されたポートフォリオ集合 \mathbf{H}_{s_B} から得られる相関係数は、 \mathbf{J}_{s_A} (投資配分比率の高い、すなわち重要度の高いアセットの集合) と \mathbf{H}_{s_A} (プロセス s_A のポートフォリオ集合) それぞれの相関係数の最小値以上になる。

さらに、候補集合 \mathbf{L}_{s_A} から移動する重要度の高いアセットの集合 \mathbf{J}_{s_A} は、移動対象とならなかったアセットの集合 \mathbf{L}_{s_B} と比較して、ポートフォリオ集合 \mathbf{H}_{s_B} の相関係数を高くするようなアセット集合である必要がある。これは、集合 \mathbf{J}_{s_A} と \mathbf{L}_{s_B} の間に、以下の関係が成り立つことを意味する。

$$R_{G_{\mathbf{J}_{s_A} \cup \mathbf{H}_{s_A}}} \geq R_{G_{\mathbf{L}_{s_B} \cup \mathbf{H}_{s_A}}} \quad (5)$$

しかしながら、Property 1 の条件である $R_{G_{\mathbf{H}_{s_A}}} \geq 0, R_{G_{\mathbf{J}_{s_A}}} \geq 0$ だけでは、式 (5) を満たす重要度の高いアセットの集合 \mathbf{J}_{s_A} は多数存在する。このため、ポートフォリオ集合 \mathbf{H}_{s_B} がより高い相関係数を得る条件として、 \mathbf{J}_{s_A} へ以下の制約を課す。

$$\begin{cases}
\text{cov}(\mathbf{P}_{\mathbf{G}_{\mathbf{L}_{s_B}}}, \mathbf{P}_{\mathbf{G}_{\mathbf{H}_{s_A}}}) > 0 \\
\text{cov}(\mathbf{P}_{\mathbf{G}_{\mathbf{J}_{s_A}}}, \mathbf{P}_{\mathbf{G}_{\mathbf{H}_{s_A}}}) > 0 \\
R_{G_{\mathbf{J}_{s_A}}} \geq R_{G_{\mathbf{L}_{s_B}}} \geq 0
\end{cases} \quad (6)$$

以上より、手順 A は、集合 \mathbf{J}_{s_A} が式 (6) の制約を満たす場合、式 (4) によりポートフォリオ集合 \mathbf{H}_{s_B} へアセット移動操作を行う。式 (6) の制約を満たさない場合、アセット移動操作は行わない。

3.3.2 手順 B (アセット返却操作)

手順 B は、第 s プロセスにおいて手順 A により作成したポートフォリオ集合 H_{s-B} へ上述の GA を適用し、GA が最終世代 K に到達したとき、適合度最大の染色体 $G_{H_{s-B}^*}$ において式 (7) を満たす“重要度の低いアセット”を H_{s-B} から L_{s+1-A} へ返却するというアセットの返却操作を行う。尚、重要度の低いアセットの集合を便宜上 J_{s-B} と定義する。

$$\begin{aligned} J_{s-B} &= \{i | w_i \leq B_{bound}, i \in H_{s-B}, w_i \in G_{H_{s-B}^*}\} \\ L_{s+1-A} &= L_{s-B} \cup J_{s-B} \\ H_{s+1-A} &= H_{s-B} \setminus J_{s-B} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、重要度の低いアセットの境界値 B_{bound} は事前に与えられるパラメタである。

3.3.1 章で定義した手順 A と同様に、手順 B における J_{s-B} に以下の制約を課す。

$$\begin{cases} cov(P_{G_{J_{s-B}}}, P_{G_{L_{s-B}}}) > 0 \\ cov(P_{G_{H_{s+1-A}}}, P_{G_{L_{s-B}}}) > 0 \\ R_{G_{H_{s+1-A}}} \geq R_{G_{J_{s-B}}} \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

以上より、手順 B は、集合 J_{s-B} が式 (8) の制約を満たす場合、式 (7) によりポートフォリオ集合 H_{s-B} からアセット返却操作を行う。式 (8) の制約を満たさない場合、アセット返却操作は行わない。

3.3.3 最適化手法 (手順 A・B) の終了条件

手順 A, B のプロセスを繰り返すことで作成される染色体 $G_{H_{s-B}^*}$ は、本論文における最適ポートフォリオの候補となる。しかしながら、Property 1 だけでは、このポートフォリオを構成する正確なアセット数を得ることは難しい。そこで、本論文では、手順 A, B の繰り返しによりポートフォリオ集合 H_{s-B} の相関係数が増えなくなった場合を提案最適化手法の終了条件とし、次式で定義する。

$$R_{G_{H_{s+1-B}^*}} \leq R_{G_{H_{s-B}^*}} \quad (9)$$

式 (9) で定義された終了条件を満たした場合、これ以上のアセット移動・返却プロセスによる適合度 $R_{G_{H_{s-B}^*}}$ の上昇は見込めないと考え、染色体 $G_{H_{s-B}^*}$ を本提案手法で得られた最適ポートフォリオとして抽出する。

4 数値実験結果

東京証券取引所における 1997 年 1 月 6 日から 2006 年 10 月 2 日までの株式市場営業日を 200 日間毎に 12

期間に区切り、各期間に対して提案最適化手法を適用した実験を行った。12 実験期間のそれぞれを、期間 1 (1997 年 1 月 6 日 ~ 1997 年 5 月 30 日)、期間 2 (1997 年 10 月 24 日 ~ 1998 年 3 月 24 日)、...、期間 12 (2006 年 5 月 12 日 ~ 2006 年 10 月 2 日) と呼ぶ。作成するインデックスファンドの対象ベンチマーク指数は TOPIX とし、対象アセットは各期間中に新規上場や上場廃止によるデータ欠如のない全ての銘柄とした。各アセットの株価と出来高、TOPIX は、東洋経済新報社の株価 CD-ROM[10] から得られる終値を利用している。このため時点 t は一株式会社市場営業日を意味し、各期間は時点 $t = 1$ から $t = 100$ までの 100 (= T) 日間で構成される。

本提案最適化手法に設定したパラメタ値を以下に示す。

全アセット数 : $N = 1000$ (実験期間の平均売上代金上位順)

GA の染色体集団サイズ : $S_{pop} = 100$

GA の最終世代数 : $K = 100$

GA の交叉確率 : 0.9

GA の突然変異確率 : 0.1

手法の実行回数 20 (手法中に GA を使用するため、1 実験期間につき 20 回の実験を行う。)

手順 A における式 (4) のアセット移動境界値 :

$$A_{bound} = \alpha \frac{1}{\#L_{s-A}} \quad (\alpha = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0)$$

手順 B における式 (7) のアセット返却境界値 :

$$B_{bound} = \beta \frac{1}{\#H_{s-B}} \quad (\beta = 0.3, 0.5, 0.7)$$

4.1 動的ポートフォリオと静的ポートフォリオの比較

全実験期間のそれぞれにおいて、 $\alpha = 2.0$, $\beta = 0.5$ と設定した本提案手法各 20 回の実行により最適化されたポートフォリオ (以降、動的ポートフォリオと呼ぶ) の相関係数平均値と選択アセット数平均値を表 1 に示す。また、比較のため、静的に選択されたアセットで構成されるポートフォリオ (以降、静的ポートフォリオと呼ぶ) へ提案手法と同一の GA (但し、GA の最終世代数は $K = 500$) のみを適用した結果も表 1 に示す。

表 1 より、本提案手法により得られた動的ポートフォリオの相関係数は、静的ポートフォリオの相関係数より、全ての実験期間において高い値となっている。また、動的ポートフォリオを構成するアセット数は、静的ポートフォリオのアセット数と比較して非常に少ない。以上より、本提案最適化手法は、多数のアセットの中から重要度の高いアセットをポートフォリオへ動

表 1: 相関係数と選択アセット数

期間	動的ポートフォリオ		静的ポートフォリオ	
	相関係数	アセット数	相関係数	アセット数
1	0.999922	323.65	0.998377	1000
2	0.999879	319.55	0.998228	1000
3	0.999952	336.60	0.998929	1000
4	0.999886	381.65	0.997674	1000
5	0.999019	207.40	0.989667	1000
6	0.999791	311.45	0.995740	1000
7	0.999888	318.85	0.997331	1000
8	0.999906	315.35	0.998267	1000
9	0.999852	296.25	0.998399	1000
10	0.999970	335.35	0.999368	1000
11	0.999961	376.30	0.998173	1000
12	0.999971	400.00	0.999480	1000

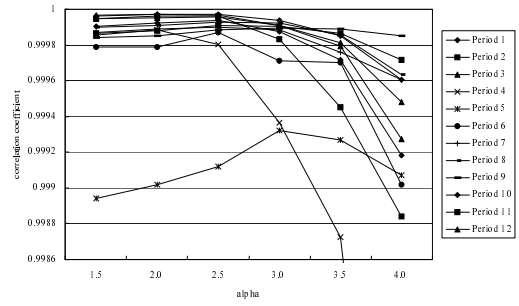
的に選択し、それらの投資配分比率を決定する有効な手法であると云える。

4.2 最適化手法のアセット移動・返却境界値

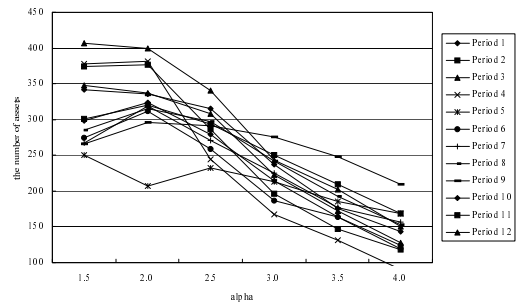
本提案手法手順 A で使用する重要度の高いアセットの移動境界値 A_{bound} 、手順 B で使用する重要度の低いアセットの返却境界値 B_{bound} のパラメタ値の違いが動的ポートフォリオに与える影響を議論するため、 $\alpha = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0$ とした $A_{bound} = \alpha \cdot 1 / \#L_{s_A}$ 、 $\beta = 0.3, 0.5, 0.7$ とした $B_{bound} = \beta \cdot 1 / \#H_{s_B}$ における数値実験を行った。ここで、 A_{bound} は、アセット数 $\#L_{s_A}$ の集合 L_{s_A} の平均投資配分比率 $1 / \#L_{s_A}$ の α 倍を表す。同様に B_{bound} は、集合 H_{s_B} の平均投資配分比率 $1 / \#H_{s_B}$ の β 倍を表す。式 (4) より α が高くなるほど 1 プロセスで重要度の高いアセットとしてポートフォリオ集合へ移動するアセット数が少なくなり、式 (7) より β が低くなるほど 1 プロセスで重要度の低いアセットとして候補集合へ返却されるアセット数が少なくなる。

各実験期間において、 β を $\beta = 0.5$ に固定し、 α を $\alpha = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0$ のそれぞれに設定した動的ポートフォリオの相関係数の平均値を図 2(a)、ポートフォリオに選択されたアセット数の平均値を図 2(b) に示す。また、 α を $\alpha = 2.0$ に固定し、 β を $\beta = 0.3, 0.5, 0.7$ のそれぞれに設定した動的ポートフォリオの相関係数の平均値を図 3(a)、ポートフォリオに選択されたアセット数の平均値を図 3(b) に示す。

図 2(a) より、 α を高く、すなわち重要度の高いアセットの移動境界値を高くすると、ほとんど全ての期間で $\alpha \geq 3.0$ においてポートフォリオの相関係数が下がることが分かる。また、図 2(b) より、重要度の高いアセットの移動境界値が高くなると、ポートフォリオへ選択されるアセット数は少なくなる。一方、図 3(a), (b) より、重要度が低いアセットの返却境界値を変化させても、

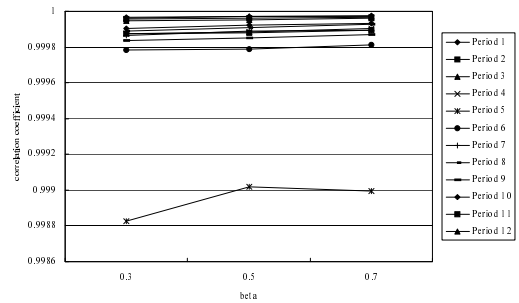


(a) 相関係数

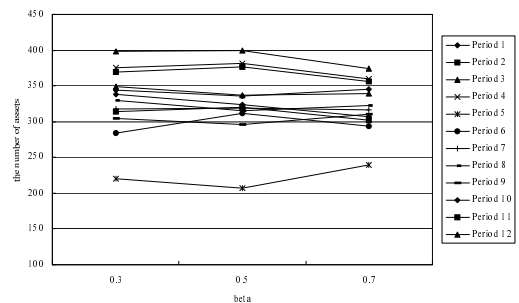


(b) アセット数

図 2: 手順 A・移動境界値別の動的ポートフォリオ



(a) 相関係数



(b) アセット数

図 3: 手順 B・返却境界値別の動的ポートフォリオ

ほとんど全ての期間でポートフォリオの相関係数とアセット数には変化がないことが分かる。以上より、本提案手法は、重要度の高いアセットの移動境界値が低いときは、効果的に動的ポートフォリオの最適化を行う。しかしながら、移動境界値が高くなり、ポートフォリオを構成する重要度の高いアセットが少なくなると、動的ポートフォリオは低い相関係数で最適化される。相関係数を利用した最適化手法において、アセットの重要度を測定する性質や制約を改善することが今後の課題となる。

5 むすび

本論文では、静的に選択されたアセットで構成されるポートフォリオではなく、動的に選択されたアセットで構成されるポートフォリオへ GA を利用した最適化手法を提案した。対象ポートフォリオはインデックスファンド、その目的関数はポートフォリオの収益率とベンチマーク指数の変動率の相関係数とし、目的関数に対して重要度の高いアセットをポートフォリオへ移動、重要度の低いアセットをポートフォリオから返却するというプロセスを利用して最適ポートフォリオの作成を行った。提案手法は動的アセット選択によりポートフォリオへの組み入れ候補となる全てのアセットを最適化対象アセットとしてリストアップできると同時に、最適ポートフォリオにとって重要度が高いアセットの投資配分比率だけを決定できるという利点をもつ。

数値実験の結果として、本論文の範囲内で言えることではあるが、静的にアセット選択が行われたポートフォリオと比較して、本提案手法は多数のアセットの中から少数のアセットを動的に選択し、高い目的関数値となるポートフォリオを作成できることを示した。

今後の課題として、相関係数だけでなくインフォメーションレシオなど様々な目的関数に対してアセットの重要度を測定する性質や制約を改善すること、また測定された重要度を利用した他の進化計算法をポートフォリオの最適化に適用すること、さらにポートフォリオのリバランス時における提案手法の有効性の検証などが挙げられる。

謝辞

本研究は、科学研究費補助金(若手研究(B) No. 20710119)の助成を受けて行われた。記して謝意を表す。

参考文献

- [1] Markowitz, H.: Portfolio Selection, *Journal of Finance*, Vol. 7, pp. 77–91 (1952)
- [2] Xia, Y., Liu, B., Wang, S., Lai, K.K.: A Model for Portfolio Selection with Order of Expected Returns, *Computers & Operations Research*, Vol. 27, pp. 409–422 (2000)
- [3] Chang, T.J., Meade, N., Beasley, J.E., Sharaiha, Y.M.: Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimization, *Computers & Operations Research*, Vpl. 27, pp. 1271–1302 (2000)
- [4] Lin, C.C., Liu, Y.T.: Genetic Algorithms for Portfolio Selection Problems with Minimum Transaction Lots, *European Journal of Operational Research*, Vol. 185, No. 1, pp. 393–404 (2008)
- [5] Streichert, F., Tanaka-Yamawaki, M.: The Effect of Local Search on the Constrained Portfolio Selection Problem, *Proceedings of 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pp. 2368–2374 (2006)
- [6] Orito, Y., Yamamoto, H., Yamazaki, G.: Index Fund Selections with Genetic Algorithms and Heuristic Classifications, *Journal of Computers and Industrial Engineering*, Vol. 45, pp. 97–109 (2003)
- [7] Aranha, C., Iba, H.: Portfolio Management by Genetic Algorithms with Error Modeling, *JCIS Online Proceedings of International Conference on Computational Intelligence in Economics & Finance*, (2007)
- [8] 折登由希子, 井ノ口学, 山本久志: 遺伝的アルゴリズムとヒューリスティックローカルサーチを用いたインデックスファンドの最適化, *電気学会論文誌 C*, Vol. 128, No. 3, pp. 407–415 (2008)
- [9] Oh, K.J., Kim, T.Y., Min, S.: Using Genetic Algorithm to Support Portfolio Optimization for Index Fund Management, *Expert Systems with Applications*, Vol. 28, pp. 371–379 (2005)
- [10] 株価 CD-ROM, 東洋経済新報社 (2003–2006)