進化ゲーム理論を用いたオプション市場分析*

Option Market Analysis with Evolutionary Game Theory

吉川満†
Mitsuru Kikkawa

明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
Department of Science and Technology, Meiji University

Abstract: This paper constructs the option market model and analyzes the real market with evolutionary game theory. This model can predict the next market states with the equilibrium stability condition. In addition, this paper compares this model and Black and Sholes [1]. We can interpret that this model gives a player's micro-foundation with Black and Sholes [1].

1 はじめに

本稿は数理ファイナンスの研究をゲーム理論を用いて, 各主体の行動から理論を構築しようとするものである. Black-Sholes [1] をはじめとする数理ファイナンスの分野においては, 危険資産, 株価は幾何 Brown 運動するという前提の下で議論されている. そのためこの経済にいる経済主体の利得は仮想的にランダムに変化していると考えることができる. このような利得がランダムに変化するゲームを記述した研究に Harsanyi [3] や Selten [9] などがあり, どの戦略が進化的に安定な戦略 (Evolutionarily Stable Strategy: ESS)[1] となるのかは容易ではない.

そこで Kikkawa [7] ではこの問題を進化ゲーム理論の立場で議論し, その違いを明確化した. また吉川 [8] ではこの Kikkawa [7] を Black-Sholes 経済に応用し, オプション評価式やその拡張を行った. 特にこのモデルは進化ゲーム理論の枠組みで考察するため, 平衡点において, 行動が確定するような市場, 先物市場[2], (ヨーロピアン) オプション市場[3]を念頭に置いている.

本稿ではこれら一連の研究を基礎として, より具体的な市場における売買モデルを構築し, それを基礎とした予測, さらには実際のデータ (日経 225 先物 1 限月 1 分足, 2009 年 7 月, 8 月) を使用し, 変動するデータから分かる市場の構造や最適な行動プロファイルを導出する.

この論文は次のように構成されている. 第 2 節では, モデルを定式化し, 戦略の数が 2 つの場合を取り上げる. 第 3 節では, 第 2 節で定式化したモデルを実際の市場の分析に使用し, 各期の市場の状態を分析する. 第 4 節では, オプション市場との関連を述べる. 第 5 節では, 結論と今後の課題等を述べる.

2 モデル

この節では進化ゲーム理論を用いて, 市場のモデルを構築する.[4] ここでは潜在的に, 大人数の主体がおり, 2 つのグループがあるとする[5]. ここでは売り手と買い手を想定している. ある期にそれぞれのグループからランダムに 1 人づつ選ばれ, 選ばれた主体同士がゲーム, 売買を行うとする. また各主体は $n(<\infty)$ 個の戦略を持っているとする.

本稿では証券市場を想定しているので, 例えば表 1 のような板情報の下で, 1 つの財の売買を行っていると考える. よってここで各主体の戦略とは, ある財 (株など) をいくらで, 買う, 売るのかという価格を表している. このような板情報に基づいて, 取引所が約定値段を決め, 売買契約を締結させる. ただしこのモデルでは 1 単位の財の売買のみを考察しており, ダブルオークション

*本研究の一部は, 平成 20 年度採択, 文部科学省 グローバル COE プログラム「現象数理学の形成と発展」現象数理若手プロジェクト「人間特有の現象に対する学習の影響 - 進化ゲーム理論による分析 -」に関する研究拠点形成費の助成を受けて行われた.

†連絡先：明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
〒 214-8571 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1
E-mail: mitsurukikkawa@hotmail.co.jp

1) 端的には, 局所漸近安定な Nash 均衡である.

2) 先物取引とは, ある特定の商品を将来の一定の期日に, 今取り決めた価格で取引することを約束する取引で, 期日までに反対売買を行うことによって決済することもできる取引を言う.

3) ここでオプションとは, ある特定の商品を, あらかじめ定められた期日 (満期日), または期間内に, あらかじめ定められた価格 (権利行使価格) で, 買い付ける権利 (コール・オプション) あるいは売り付ける権利 (プットオプション) をいい, この権利を取引するのがオプション取引という.

4) 進化ゲーム理論を用いて, 証券市場の分析した 川西 [5] や市場のマイクロストラクチャーのモデル Easley and O'hara [2] とは異なり, 情報構造など大幅に簡略化している. 分析しているような短期市場において, 実際良い情報の獲得如何により価格が変動することは見られるが, 本稿ではそれ以前のより基本な市場における売買モデルの構築を目的としたため, 情報の効果を考慮しなかった.

5) 進化ゲーム理論の文脈では非対称 2 人ゲームのことを示している.

のような数量まで考察することはできない．そのため数量は多くの人がその価格で売買するということで表現している．

(売呼値)	銘柄 (値段)	(買呼値)
2 4 H I	成行呼値	1 3 KM
○ ○ ○	503 円	
○ ○ ○	502 円	1 T
○ ○	501 円	5 2 P N
1 1 1 G F E	500 円	4 3 2 1 A B C D
2 S	499 円	○ ○ ○
4 R	498 円	○ ○ ○
	497 円	○ ○ ○

表 1: 板情報の例 (東京証券取引所のホームページより)
(注) 1. アルファベットは取引参加者記号の代用。2. アルファベットの上の数字は株数で、単元は 1 単元の株式数 1000 株とする。3. ◯ 印は呼値の取引参加者記号及び株数を省略。4. 始値が決定するまでの呼値については、すべて同時に行われたものとみなす。

ここでの各主体の利得は締結した売買契約をもとに, 各主体の利得が定まる．特にこのゲームはゼロ=サム型の利得構造をしている．

ここで Black-Sholes [1] などの数理ファイナンスの分野の研究との関連性を重視するために, 株価・指数は幾何 Brown 運動しているとする．そのため t 期の各主体の利得はそれぞれ $S(t)-K$, $K-S(t)$ となる．そのため利得はランダムに変化していると分かる．ただしここで K は行使価格を表し, 実際に利得が得られるのは, 期末である．

このことは次のような Replicator 方程式を用いて, 表現することができる．利得 g_i の値が株価・指数の不規則な変動によって, その平均値 $\bar{g}$ の近傍で時間的にランダムな変化をするものとする．つまり次の方程式系を考えることになる．

$$\text{(2.1a)}\quad \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t)\big(g_i(t)-\bar{g}(t)\big),\quad g_i(t)=g_i+\zeta(t)$$

$$\text{(2.1b)}\quad \frac{dy_i(t)}{dt} = y_i(t)\big(h_i(t)-\bar{h}(t)\big),\quad h_i(t)=h_i+\zeta'(t)$$

ただしここで x_i とは 戦略 i を採用する確率とする．$\zeta(t),\zeta'(t)$ は平均値 g_i, h_i の近傍でのランダムな時間的変化を示す関数とする．

ただしこの方程式系 (2.1) の一般的な性質は解析的には分からない.[6)]

2.1　例：戦略の数が 2 つ

そこでここでは買い手と売り手のそれぞれの戦略は行使価格とし, {bear, bull} などの 2 つの { 戦略 1, 戦略 2} があるとし, 毎期独立に戦略を選択するとする.[7)] 特にここでは前期の市場を参考に, 今期の戦略, 行使価格を決定する．例えば前期が約定値段が上昇した場合は, 今期も約定値段が上昇する (買い手の場合, bear), あるいは下落する (買い手の場合, bear) など決定するとする．

このゲームは次の利得表のように, ゼロ＝サム型のゲーム構造をしている．ただしここでの利得 $g_i(t) = g_i+\zeta(t)$, $g_i(t)=a(t), b(t)$ とする．

I ＼ II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$a(t), -a(t)$	$0, 0$
戦略 2	$0, 0$	$b(t), -b(t)$

利得表 1

このときの Replicator 方程式は次のようである．

$$\text{(2.2a)}\quad \dot{x} = x(1-x)\big\{-b(t)+\big(a(t)+b(t)\big)y\big\},$$

$$\text{(2.2b)}\quad \dot{y} = y(1-y)\big\{b(t)-\big(a(t)+b(t)\big)x\big\},$$

ただし x を主体 I が戦略 1 を採用する確率とし, y を主体 II が戦略 1 を採用する確率とする．

このときの平衡点 (x^*, y^*) は $(0,0), (1,1), (1,0), (0,1)$, $\left(\frac{b(t^*)}{a(t^*)+b(t^*)}, \frac{b(t^*)}{a(t^*)+b(t^*)}\right)$ であり, このときの ESS は内点 (混合戦略) である．また安定性については, Jacobi 行列を求めることによって, それぞれの平衡点の安定性を導出することができる．

今までが Replicator 方程式を用いて, 市場モデルの定式化とその性質であった．次にこの Replicator 方程式を用いて, 次期の各主体の行動を予測するための方程式を導出する．(2.2) の両辺を $xy(1-x)(1-y)$ で割り, 整理すると, 次を得る．

$$\text{(2.3)}\quad \dot{x} = -\frac{b(t)}{y}+\frac{a(t)}{1-y},\quad \dot{y} = \frac{b(t)}{x}-\frac{a(t)}{1-x}.$$

実はこの非対称 2 人ゲームは**ハミルトニアン**(Hamiltonian) と呼ばれる保存量を持ち [4, 6], 次の**正準方程式**(canonical equation) を得る．

6) 対称 2 人ゲームの場合, 主体の戦略の分布は対数正規性に従う.(Kikkawa [7] の命題 3)

7) 実際の市場では, 各主体の戦略の数はぜいぜい 5 つ程度である．また 1 分や数十秒程度の超短期的な市場の場合で考えると, 3 つ程度 (bear 的, bull 的, 均衡価格と同じ戦略) で構わない．

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{2.4}$$

これから次のハミルトニアンを得る.[8)]

$$H = -b(t)\bigl(\log x + \log y\bigr) - a(t)\bigl(\log(1-x) + \log(1-y)\bigr)$$

また上述の正準方程式 (2.3) を微分の公式から離散化すると, 次を得る.

$$x(t+\varepsilon) = x(t) - \Bigl(\frac{b(t)}{y(t)} - \frac{a(t)}{1-y(t)}\Bigr)\varepsilon, \tag{2.5a}$$

$$y(t+\varepsilon) = y(t) + \Bigl(\frac{b(t)}{x(t)} - \frac{a(t)}{1-x(t)}\Bigr)\varepsilon. \tag{2.5b}$$

この式を用いることによって, 1 期先の x, y の値を知ることができる.

次節で実際の市場を分析する前に, 市場のモデルの利得表を定義すると, 次の 3 つに分類することができる. ここでは市場の動態, 変化を主眼に調べているので, t 期の約定値段が $t-1$ 期のものに比べて, (i) 変わらない, (ii) 上がる, (iii) 下がる場合の 3 つの場合しかない.

ここで利得表中の利得は符号で表している. また買い手が戦略 1 を採用する場合は, bull(強気) で安い価格を提示, 戦略 2 の場合は bear(弱気) で高い価格を提示すると解釈する. 売り手の場合も同様に戦略 1 を採用する場合は, bear(弱気) で安い価格を提示, 戦略 2 の場合は bull(強気) で高い価格を提示すると解釈する.

(i) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**変化しない**場合:

I＼II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$+,-$	0,0
戦略 2	0,0	$-,+$

利得表 2-1

このときの利得表は約定値段が変化しない時において, 買い手と売り手が共に戦略 1 を採用した場合は, 約定値段よりも安い価格で取引ができたので, 買い手に有利な利得となる. 逆に売り手の場合は不利な取引となったため, 負の利得を得ることになる. また買い手と売り手の価格が合致しない場合, 例えば買い手が戦略 1 を採用し, 売り手が戦略 2 を採用した場合は, 約定が成立されないために各主体の利得は 0 となる. またこのゲームの Nash 均衡は (買い手の戦略, 売り手の戦略)= (戦略 1, 戦略 2) である.

(ii) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**上昇**する場合:

I＼II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$+,-$	0,0
戦略 2	0,0	0,0

利得表 2-2

このときの利得表は買い手が戦略 1 の安い価格を提示し, 売り手も戦略 1 の安い価格を提示すると, 約定が成立し, 買い手が正の利得を得, 売り手が負の利得を得る. 買い手, 売り手共に戦略 2 を提示の場合約定が成立するが, 期待と同じ価格となっており, 共に利得を得ないために, 0 とした. また戦略が一致しない場合は上述と同じである. またこのゲームの Nash 均衡は, (買い手の戦略, 売り手の戦略)= (戦略 1, 戦略 2), (戦略 2, 戦略 2) であり, 特に (戦略 2, 戦略 2) は**完全均衡点**(perfect equilibrium) である.

(iii) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**下落**する場合:

I＼II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	0,0	0,0
戦略 2	0,0	$-,+$

利得表 2-3

このときの利得表は利得表 2-2 の戦略 1 を戦略 2, 戦略 2 を戦略 1 に置き換えれば, 同じ論理である. またこのゲームの Nash 均衡は, (買い手の戦略, 売り手の戦略)= (戦略 1, 戦略 1), (戦略 1, 戦略 2) であり, 特に (戦略 1, 戦略 1) は完全均衡点である.

以上の結果, 利得表 2-1,2,3 に共通するのは, Nash 均衡として, (買い手の戦略, 売り手の戦略)=(戦略 1, 戦略 2) が存在することである. つまり買い手は安い価格を提示 (bear) し, 売り手は高い価格 (bull) を提示するという戦略が約定値段がどのように変化しようとも, 常にこの戦略が提示されるということが分かる. 実際 (2.5) からも, Brown 運動的に刻々と利得が変化する場合を考えても, 常に $x \to 1, y \to 0$ (買い手は戦略 1(bear), 売り手は戦略 2(bear)) となることが分かる. つまり買い手や売り手は自分に有利な行動を採用する傾向があるということが分かる. この結果をそのまま適用すると, 約定が成立せず, 株価・指数の変動はないということが推測される. しかし実際には株価・指数は上下して変動しているので, この利得表では市場を記述するには不十分であり, 修正が必要だと分かる.

3 応用 : 日経 225 先物市場

上記のモデルでは指数は幾何 Brown 運動していると仮定していたが, 実際の指数は幾何 Brown 運動していないということが観察される. そこでこの節ではある

8) このハミルトニアンを時間に関して, 1 階時間微分すると, 0 となるため, **保存系**(conservative system) と呼ばれる.

日における 1 分足の日経 225 先物市場における指数の終値データを用いて, 市場の状態を分析する. つまり実際の市場データの値からゲームの状況を分類する.

例えば 2009 年 8 月 26 日, 1 日の日経 225 先物 1 限月における 1 分足の指数の推移は図 1 のようになる.

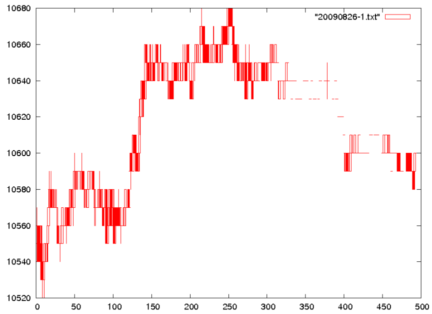

図 1: 2009 年 8 月 26 日, 日経 225 先物 1 限月における 1 分足の指数の推移.

第 2 節で定めた利得表は約定成立においての利得であり, その実現のしやすさまでは考慮に入れていない. 例えば取引において, 約定を成立させるだけであるならば, 現在の値段において, 注文を行えば, この場合は利益は少ないが約定する. しかし戦略的に価格づけた場合予測が当たると, 利得が少し多く得ることができることがある. 第 2 節で記した利得表はこのようなことを考慮に入れず, 利得の大きさのみに着目した. そのため現実とは異なるような結論が得られた. そこで次のように利得表を変更する.[9)]

(i) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**変化しない**場合:

I＼II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$-,+$	0,0
戦略 2	0,0	$-,+$

利得表 3-1

この利得表は約定値段が変化しない時において, Nash 均衡が混合戦略となるように利得を変更した. 買い手と売り手が共に戦略 1(2) を採用した場合は, 売り手は約定値段よりも安 (高) い価格で取引ができ, 売る (買う) ことができたと解釈することにより, 正の利得を得る. 逆に買い手はより有利な条件で購入することができるので, 負の利得を得ると解釈する. また買い手と売り手の戦略が合致しない場合, 例えば買い手が戦略 1 を採用し, 売り手が戦略 2 を採用した場合は, 価格が一致しないため, 約定が成立しないために, 各主体の利得は 0 となる. またこのゲームの Nash 均衡は混合戦略である.

(ii) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**上昇**する場合:

I＼II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$+,-$	0,0
戦略 2	0,0	$+,+$

利得表 3-2

この利得表は買い手は戦略 1 の安い価格を提示し, 売り手も戦略 1 の安い価格を提示すると, 約定は成立し, 買い手は正の利得を得, 売り手は負の利得を得る. 買い手, 売り手共に戦略 2 を提示の場合は, 期待通りに約定が成立し, いくらかの買い手, 売り手共に正の利得を得る. また戦略が一致しない場合は上述と同じである. またこのゲームの Nash 均衡は, (買い手の戦略, 売り手の戦略)= (戦略 2, 戦略 2) のみである. よってこのときは価格は上がりやすいことを示している.

(iii) 約定値段が $t-1$ 期から t 期で**下落**する場合:

I＼II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$+,+$	0,0
戦略 2	0,0	$-,+$

利得表 3-3

この利得表は利得表 3-2 の戦略 1 を戦略 2, 戦略 2 を戦略 1 に置き換えれば, 同じ論理である. またこのゲームの Nash 均衡は, (買い手の戦略, 売り手の戦略)= (戦略 1, 戦略 1) のみである. よってこのときは価格は下がりやすいことを示している.

前節では指数の変動は幾何 Brown 運動に決まるとしたが, この節では実際のデータを利用する. 次の表 2 は 2009 年 7 月 17 日から 8 月 26 日までの日経 225 先物 1 限月の 1 分足の $t-1$ 期に比べて t 期の終値が上昇 (下落), それとも変化しない回数を数えたものである. この表からも分かるように, 圧倒的に価格が変化しない状態が多い.

図 2 は 2009 年 8 月 26 日のデータにおいて, 値段が上昇した 90 回, 利得表 3-2 を使用し, 逆に値段が下落した 89 回は, 利得表 3-3 を使用し, 値段が変わらない 314 回は利得表 3-1 を使用した場合の Replicator 方程式 (2.5) の軌跡 (実線 (赤)) である. また紙面の都合上, データなどを示すことはできないが, 今期指数が上がると, 次の期も上がる, 逆に下がると, 次の期も下がるというな連続した指数の変化はあまり起こらない. このことに着目すると, 次の期の状態における行動が推測しやすい. つまり今期指数が上昇すると, 次の期は変化しないか, 下落する確率が高い. 逆に今期指数が下落すると, 次の期は変化しないか, 上昇する確率が高い. この

9)実際各主体がどのような利得表を持ち, ゲームを行っているのかは分からない. そこで利得表から得られる Nash 均衡から定式化する.

日付	上昇	下落	変化なし	増減
7/17	79	77	337	+2
7/21	81	70	342	+9
7/22	93	89	311	+4
7/23	93	89	311	+4
7/24	95	85	309	+10
7/27	90	84	319	+6
7/28	84	87	322	−3
7/29	96	80	317	+4
7/30	93	84	316	+9
7/31	90	88	315	+2
8/3	109	97	287	+12
8/4	83	96	314	−7
8/5	71	82	340	−9
8/6	104	94	295	+10
8/7	92	84	317	+8
8/10	78	82	333	−4
8/11	78	73	342	+5
8/12	81	78	334	+3
8/13	80	78	335	+2
8/14	78	76	339	+2
8/17	86	112	295	−16
8/18	107	100	286	+7
8/19	89	100	304	−11
8/20	82	76	335	+6
8/21	102	99	292	+3
8/24	77	70	346	+7
8/25	77	81	315	−4
8/26	90	89	314	+1
8/27	98	101	294	−3
8/28	82	82	329	0

表 2: 7/17~8/28 までの 1 分毎の終値データを $t-1$ 期から t 期への変化の回数を表している.

考えを用いると, 各主体を出し抜けることができる (点線 (緑)).

以上のように短期市場の特性を利用して, 利得表を新たに定式化し, 各主体の最適な行動プロファイルを導出した.

4 オプション市場

前節では先物市場を取り上げたが, この節ではオプション市場を取り上げ, Black and Sholes [1] と比較を行う.

本節では前節のフレームワークを利用し, モデル構築を行う. ここでは先ほどと同様に主体のタイプはオプ

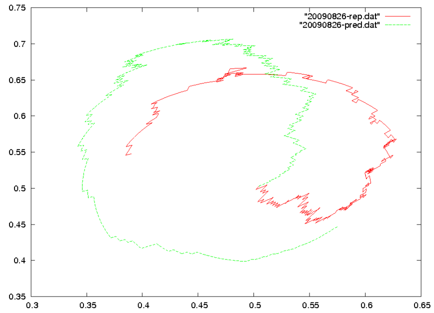

図 2: 2009 年 8 月 26 日のデータを利用し, 実線 (赤) が Replicator 方程式 (2.5) の軌跡, 点線 (緑) は各主体の行動を予測した上で, 最適な行動の軌跡を表している. (x, y の初期値は共に 0.5 とした.)

ションの発行者と購入者の 2 タイプいるとする. それぞれの主体の戦略は行使価格を戦略とし, {bear, bull} などの 2 つの { 戦略 1, 戦略 2} があるとし, 毎期独立に戦略を選択するとする. よってこの時の各主体の利得はオプション発行者が $K-S(t)$, 購入者は $S(t)-K$ とする. よってこのゲームは次の利得表のように, ゼロ＝サム型のゲーム構造をしている. ただしここでの利得 $g_i(t) = g_i + \zeta(t)$, $g_i(t) = a(t), b(t)$ とする.

I＼II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$a(t), -a(t)$	$0, 0$
戦略 2	$0, 0$	$b(t), -b(t)$

利得表 4

上述の主体の戦略的な行動を Black-Sholes モデルに導入すると, 行使価格が変更されるということであることが分かる. Black-Sholes の公式導出の際に行使価格の変更が影響するのは, 境界条件を使用するときであった.[10] そのためその境界条件を $K := \bar{K}$ とすれば, この場合の Black-Sholes の公式が導出される.

$$f(S,t) = S \cdot N\Big(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\Big) - \bar{K} \cdot e^{-rx} \cdot N\Big(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\Big). \tag{4.1}$$

ただし $\bar{K} =$ 戦略 1 における行使価格 $\cdot x^*+$ 戦略 2 における行使価格 $\cdot(1-x^*)$, x^* は混合戦略を採用する場合の確率とする.

吉川 [8] では連続, 離散時間体系において, ポートフォリオを他の資産から影響がある場合に拡張し, 非線形拡散方程式を導出し, その非線形性をゲーム理論を用いて説明している.

10) 付録参照.

5　終わりに

以上のようにまず先物市場を定式化し, 市場における約定値段の動態に着目し, 市場の状態を分類した. 次に進化ゲーム理論を利用することによって, 1 期先予測, さらにはそれを見越した各主体における最適な行動プロファイルを導出した.

ゲーム理論は利得の決定の仕方によって, Nash 均衡が決定する. そのため一見尤もらしい利得表も間違ってしまうことがある. そこで実際の状況から利得を定めるという手法を用いた.

この分析からも分かるように, 確率的な要素が支配ているシステムでは, 1 期先を予測することは不可能であるため, 今まで決定論からのズレを確率的なノイズと理解するのではなく, 確率的な側面の中に, 決定論的な性質があると理解することが良いように感じる.

今後の課題として, 板情報を忠実に表す $n(\sim 3, 4)$ 戦略の場合, さらには板情報が決定すれば, 約定値段が決定する. それを取り入れたモデリングが必要だと考える. また実務への応用のためには, 過去のデータを用いた分析ではなく, 今現在のデータを入手し, それを加工するというオンラインリアルタイムの分析が今後重要となってくると考えている.

付録: Black-Sholes の公式

ここでは Black-Sholes 方程式を導出する. 財は 2 財あり, 利子率 r で変化していく安全資産と, 幾何 Brown 運動に従って変動する危険資産 (株価)S が存在する. ここでは裁定機会は存在しないとすると, ポートフォリオの価値は次を得る.

$$\text{(A.1)}\quad r\cdot f(S,t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot\sigma^2 S^2 + r\cdot\frac{\partial f}{\partial S}\cdot S,$$

$$\text{境界条件}\ \ f(S_T,T) = \begin{cases} S_T - K, & S_T \geq K,\\ 0, & S_T < K.\end{cases}$$

この偏微分方程式は **Black-Sholes の偏微分方程式**と呼ばれる. またこの式を変形すると, 次の式を得る.

$$\text{(A.2)}\quad y_{uu}(u,x) = \frac{2}{\sigma^2}\cdot y_x(u,x),$$

$$\text{境界条件}\quad y(u,0) = \begin{cases} K\cdot(e^u - 1), & u \geq 0,\\ 0, & u < 0,\end{cases}$$

ただし, $f(S,t) = e^{-r(T-t)}\cdot y(u,x)$, $u = \log\frac{S}{K} + \Big(r - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\Big)$, $x = T - t$ とする. この偏微分方程式は**熱方程式**(heat equation) であると分かる. この (A.2) を解くと次を得る.

$$\text{(A.3)}\quad f(S,t) = S\cdot N\Big(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\Big) - K\cdot e^{-rx}\cdot N\Big(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\Big).$$

これは **Black-Sholes(コール・オプション) の公式**と呼ばれている.

参考文献

[1] Black, Fischer and Scholes, Myron: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637–654 (1973)

[2] Easley, David and O'hara, Maureen: Time and the Process of Security Price, *The Journal of Finance*, Vol. 47, pp. 577–605 (1992)

[3] Harsanyi, John C.: Games with Randomly Distributed Payoffs: A New Rationale for Mixed-Strategy Equilibrium Points, *International Journal of Game Theory*, Vol. 2, pp. 1–23 (1973)

[4] Hofbauer,Josef and Sigmund, Karl: *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press (1998) (邦訳): 竹内康博, 佐藤一憲, 宮崎倫子 (訳) 進化ゲームと微分方程式, 現代数学社, (2001)

[5] 川西 諭: ノイズのある合理的期待均衡モデルにおける投資情報獲得戦略の多様性について, 現代経済学の潮流 2008, 第 4 章, pp. 105–141 (2008)

[6] 吉川 満: 非対称 2 人ゲームの大域的な分析とノイズの役割 - 最終提案ゲームを例にとって -, 関西学院　経済学研究, 第 36 号, pp. 21–38 (2005)

[7] Kikkawa, Mitsuru: Co-evolution and Diversity in Evolutionary Game Theory : Stochastic Environment, 京都大学数理解析研究所講究録, forthcomming (2009)

[8] 吉川 満: オプションの戦略的な価格付け : Black-Sholes 方程式の周辺, 北海道大学数学講究録, # 140, pp. 142-146 (2009)

[9] Selten, Reinhard: A Note on Evolutionary Stable Strategies in Asymmetric Animal Conflicts, *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 84, pp. 93–101 (1980)

[10] Weibull, Jorgen W.: *Evolutionary Game Theory*, The MIT Press (1995) (邦訳): 大和瀬達二 (監訳) 進化ゲーム理論, オフィスカノウチ, (1998)