東京証券取引所における現物市場ルールの特性に関する研究

A Theory of Intraday Patterns under Tokyo Stock Exchange Rules: Continuous Double Auction and Call Market

古幡征史 [1]*　Masabumi Furuhata[1]

[1] 北陸先端科学技術大学院大学
[1] Japan Advanced Institute of Science and Technology

Abstract: This article develops a methodology to compare market performances under different trading mechanisms for equities implemented in Tokyo Stock Exchange (TSE): continuous double auction and call market. Our results show that patience on time-to-execution of traders has a significant impact on market performances. Hence fast moving equities tend to shrink their liquidity under call market having a long interval on executions.

1　はじめに

現代的な市場では，取引者はあらかじめ定められたルールに基づいて取引活動を行う．特に電子的に取引される場合，取引に関するルールやプロトコルは明確に定められる．市場での取引行動の特色は，取引所の売買制度の特徴に大きく依存する．わが国を代表する東京証券取引所（以下，東証）では，取引者が信頼できる売買制度を提供することを目的として，時代とともに取引ルールは変化してきた．特に，変化する提供可能な情報技術の活用，また変化する取引者の環境に応じた変更がされてきている．昨今では２０１０年１月４日の新取引システム (arrowhead) の稼動によりいくつかの取引ルールに変更が加えられた．

東証の取引制度の最大の特徴の一つとして，二場制があげられる．二場制とは前場と後場から成り立ち，その間に昼休みを取ることを言う．現在のルールでは，取引所は９：００~ １５：００まで取引がなされ，１１：００~ １２：３０の昼休みの時間帯は約定されていない．この昼休みの役割に関して，継続・短縮・廃止などの意見が分かれている．廃止の根拠として，グローバル・スタンダードと異なるという意見が存在するが，この意見は必ずしも的を得ていない．確かに，米国や欧州の取引所では昼休みは存在しないが，これらの取引所での取引者は時差の異なる地域にいるため，取引所の存在するタイムゾーンでの昼休みに同調するメリットが取引者にとって小さいことが第一に挙げられる．本論文ではこのような議論と異なり，理論的，そして実証的に東証の現物市場における売買制度の特性を明らかにすることを目的とする．特に昼休みに焦点を当てる．現在，昼休みの制度を設けている主要な取引所は，東証の他に上海・香港・深センに限られ（フランクフルト証券取引所は２分間の昼休みが存在する），本格的な理論研究はなされていない．

昼休みの存在しない市場では，U-字形の取引パターン（市場が開始される朝と市場が閉まる夕方に活発な取引が行われ，日中に軽い取引が行われること）が多く報告されている（例えば [1]）．彼らは，ディーラー市場での理論取引モデルにて，取引者の取引タイミングを自由裁量の下，その最適行動を表現し，取引の集中する傾向の理論化，および情報トレーダーは，取引が集中しているタイミングでより活発に取引をすることを示し，市場の開始と終了時の取引の活発化の理論的説明を行った．市場での取引に関する理論モデルは，NYSE のスペシャリスト，東証でのかつての才取，Nasdaq やロンドンのディーラーを参考にしたディーラー市場下にて発展してきた (例えば，[3] や [4])．ディーラー市場では散逸している情報は注文を集約しているディーラーにもたらせ，価格調整メカニズムが働くことを前提としている．東証では上述のように昼休みを挟み板寄せ方式から午後のザラバ取引へと移行する．そのため，上述の U-字形をベースに，W-字形の取引量になることが知られている [5].

一方，昨今の市場では指値や成行を中心とした注文を連続的に取り扱う電子的な注文板での取引の重要性が高い．注文板での基本取引プロセスは事前に指定された価格を持つ流動性を提供する注文に対して，流動性を享受する新たな注文を対当させるという単純なものである．しかしながら，これらを理論モデル化することは，多くの複雑性を内包しており，大きなチャレンジである．特に，ある指値注文が将来の注文と約定されることを考慮するには，現在の他の注文との競合，将来

*連絡先：北陸先端科学技術大学院大学　知識科学研究科
E-mail: k439bk439b@gmail.com

の他の注文との競合，また将来の成行注文の数量等を考える必要がある．すなわち，一つの注文の理論的モデル化のために，取引プロセスに関わる全ての注文の意思決定の組み合わせを考慮に入れることは非常に複雑なパターンを考慮に入れることを意味する．単一期間の理論モデルとして，Seppi [9] は取引の緊急性の違いに着目して分析しているがある．単一期間モデルは最適取引方法に関する分析は可能であるが，取引制度の特色をうまく表現できない．一方，Foucault et al. [2] は多期間での理論モデル化（以下，FCC モデル）をしており，注文板での取引のダイナミクスを取引者の約定までの忍耐性を考慮に入れて表現している．FCC モデルでは，取引者は市場へポアソン分布に基づき到着し，所与の商品価値に対し最良気配値に対応した指値価格のバーゲニングとして表現している．

本論文では FCC モデルを基に，ザラバ方式と板寄せ方式での取引行動の特色について分析を行う．FCC モデルでは，上述の U-字形の取引パターンの確認は直接行えないため，取引者の市場への到着パターンを最良気配値に動的に対応するモデルをザラバ方式下で考える．これにより，均衡状態に向かうにつれ，取引が非活発になる U-字形の特徴を示す．さらに，板寄せ方式での取引のパターンを分析し，ザラバ方式と板寄せ方式での取引を比較分析する．比較のポイントとして，流動性に着目し，合理的な状態での２つの取引制度下での約定数量を挙げる．

2　理論モデル

本節ではダブルオークションでの代表的な２方式であるザラバ方式と板寄せ方式を利用された場合の市場での取引行動を理論的に分析するためのモデルを詳述する．

2.1　記号と表記法

理論分析で用いる基本的な記号とその表記法について示す．取引をする上で事前に制限値幅が存在することを仮定する．上限を A，下限を B とし，値幅を $K = A - B$ とする．この制限値幅内で取引は行われる（[9] や [7]）．取引者は注文を提示する際，以下の条件を決定して発注を行う．

- 売り $Sell$，買い Buy
- 数量 q
- 価格 p

一つの注文は売り買いどちらかであり，数量を明示する．また，発注時に提示可能な価格は $B \leq p \leq A$ とし，最小単位を１円（１価格ティック＝１円）とする．そして，提示する価格は指値注文と成行注文によって意味するものが異なる．指値注文では取引者が約定時に許容する最低価格（売り注文時）p_{Sell}，あるいは最高価格（買い注文）p_{Buy} を指定し，成行注文ではこれを設定しない．約定される注文の決定方法および約定価格は取引方式に依存し，これらについては説明時に詳述する未約定の注文のうち，最も条件の良い価格を最良気配値と呼び，最良売り気配値 a，最良買い気配値 b と記述する．この２つの最良気配値の間隔をスプレッド $s = a - b$ と呼ぶ（$s \in \{1, \ldots, K\}$）．ザラバ方式下にて注文時に約定される注文を流動性を享受する注文と呼び，注文時に約定されず注文板に記録される注文を流動性を供給する注文と呼ぶ．流動性を供給する注文でスプレッドを縮める注文を価格改善する注文と呼ぶ．その際，注文後のスプレッドが j となる注文をj-指値注文と呼ぶ，ここで $j \in \{0, \ldots, s-1\}$ であり，売り注文と買い注文時のj-指値注文は $j = p_{Sell} - b$ と $j = a - p_{Buy}$ である．

ザラバ方式での約定は以下の条件を満たす場合に執行される．指値注文が最良気配以上の指値の場合，最良気配の中で最も古い注文と対当（マッチング）され，約定価格は最良気配値で約定される．それ以外の場合は，注文板に記録され優先順位は同一指値の既存の未約定注文の中で最後列となる．

板寄せ方式での約定は，ある決められた時刻に執行される．ここで未約定の売り注文の数を NS，買い注文の数を NB とする．それぞれの注文を以下のように順序付けする（注文の数量がそれぞれ１の場合）．

$$p_{Sell}^{(1)} \leq p_{Sell}^{(2)} \leq \cdots \leq p_{Sell}^{(NS)}$$
$$p_{Buy}^{(1)} \geq p_{Buy}^{(2)} \geq \cdots \geq p_{Buy}^{(NB)}$$

ここで，括弧付きの番号は順序付けされた番号とする．板寄せによる約定数を NC とすると，

$$NC = \max\left\{ i : p_{Sell}^{(i)} \leq p_{Buy}^{(i)} \right\}$$

であり，約定される注文は (NC) より小さな番号の注文となる．価格ソートされた取引者番号の順序関係を $\preceq$ で表現すると，$(i) \preceq (NC)$ を満たす取引者 (i) が約定される．分析の簡素化のため，$p_{Sell}^{(i)} = p_{Buy}^{(i)}$ のときを考えると，約定される注文は全て同一の約定価格 $\tilde{p} = p_{Sell}^{(i)} = p_{Buy}^{(i)}$ である．

2.2　仮定

理論分析を行う上で以下の仮定を設定する．

A1 発注タイプは指値注文とする

A2 取引数量は 1 ユニットとする

A3 発注後の注文の変更やキャンセルがないとする

A4 取引者のリスクへの態度は中立とする

A5 価格改善する取引者は売り手と買い手が交互に到着する

A6 価格改善をする取引者の到着間隔はポアソン分布に従う

A1 の発注タイプの仮定において，ザラバ方式下では価格改善をする注文を全てj-指値注文で表現する．成行注文は $j = 0$ のj 指値注文で表現する．A2,A3,A4, そして A5 の仮定は強いものであるが分析の複雑性を回避するために設定している．これらの設定は Foucault et al. [2] の仮定に従っている．A6 の到着間隔に関する仮定は [1], [6], [2] や [8] と同様に到着する．しかしながら，ザラバ方式での特徴である日中での中だるみを表現するために以下の設定を加える．価格改善する取引者の期待到着間隔は注文板の最良気配値より影響を受ける．売り手の期待到着間隔は $\frac{1}{\lambda_{M-b}}$，買い手の期待到着間隔は $\frac{1}{\lambda_{a-M}}$ とする．ここで，λ はポアソン分布の期待値とし，M はある中心価格とする．また，期待到着間隔は売り手と買い手で M を中心に対称とする．さらに，期待到着間隔は最良気配値に対して単調増加することを仮定する ($\frac{1}{\lambda_{M-b}} > \frac{1}{\lambda_{M-b'}}$ if $b < b'$; $\frac{1}{\lambda_{a-M}} < \frac{1}{\lambda_{a'-M}}$ if $a < a'$)．すなわち，より高い最良買い気配（安い最良売り気配）であれば，より早く価格改善する売り手（買い手）が到着する．さらに，より安い最良買い気配（高い最良売り気配）であれば，加速度的に売り手（買い手）の到着間隔が広がると仮定する．これらの関係は図 1 に示す通りである．水平軸に最良気配値を取り，鉛直軸に価格改善する取引取引者の期待到着間隔を示す．売り手と買い手の到着間隔は中心値 M で対称と仮定する．

2.3 ザラバ方式下での取引者のモデル

取引者は注文から約定が執行されるまでの時間に対して機会費用がかかるとする．つまり，約定されるまので時間が長いほど，取引者の利益が減少する．注文が約定される単位時間当たりの機会費用を δ_i とする．すなわち，性急な取引者ほど単位時間当たりの機会費用が高い．

最良気配値とj 指値注文により，ザラバ方式下での期待執行時間が得られると仮定する．売り手の期待執行時間を $T^{Sell}(j, b)$ とし，買い手の期待執行時間を $T^{Buy}(j, a)$ とする．ここで $j = 0$ の際，$T^{Sell}(j, b) = T^{Buy}(j, a) = 0$ である．よって，売り手と買い手の期待

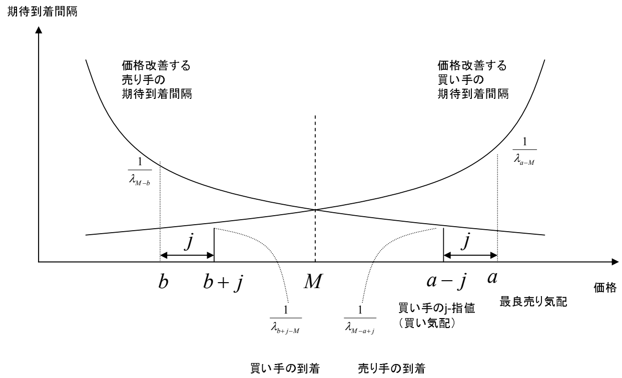

図 1: 最良気配値と価格改善取引者の到着パターン，および j-指値注文

待ち時間費用は$\delta_i T^{Sell}(j, b)$ (i が売り手)，$\delta_i T^{Buy}(j, a)$ (i が買い手) である．

取引者の想定する商品価値 v_i を所与とする．この価値は，不変で取引から独立していると仮定する．取引者の期待利益は売り手と買い手でそれぞれ以下のようになる．

$$\begin{aligned}\Pi_i(j) &= p_i - v_i - \delta_i T^{Sell}(j, b)\\ &= (b - v_i) + j - \delta_i T^{Sell}(j, b)\\ \Pi_i(j) &= v_i - p_i - \delta_i T^{Buy}(j, a)\\ &= (v_i - a) + j - \delta_i T^{Buy}(j, a)\end{aligned}$$

したがって，取引が約定した際の期待利得は売り手，買い手で以下のように表現される

$$\pi_i(j) = \begin{cases} j - \delta_i T^{Sell}(j, b) \\ j - \delta_i T^{Buy}(j, a) \end{cases}$$

上記より，価格改善する取引者の最適戦略（指値の決定方法）は以下の最適問題の解となる．

$$\max_{j \in \{0,\ldots,s-1\}} \pi_i(j)$$

2.4 板寄せ方式下での取引者のモデル

板寄せ方式下では，約定タイミングが事前に決定されている．取引者の注文から約定が執行されるまでの時間に対する機会費用を固定とし γ と記す．商品価値に関してザラバ取引と同様に考える．期待利益は売り手の場合：

$$\Pi_i(p_i, p_{-i}) = \begin{cases} \tilde{p} - v_i - \gamma & \text{if } (i) \preceq (NC) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

買い手の場合：

$$\Pi_i(p_i, p_{-i}) = \begin{cases} v_i - \tilde{p} - \gamma & \text{if } (i) \preceq (NC) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

ここで $-i$ の添え字は自分以外の他の取引者の注文の価格ベクトルを表現する．また，NC 番目までの取引者は単一価格 $\tilde{p}$ で約定され，正の利得を得る．それ以外の取引者に関してはゼロとなる．

3 理論分析

3.1 ザラバ方式での分析

本節ではザラバ方式下での市場の特色を分析する．注文板の状態に応じて，ある指値注文を所与とした場合の期待執行時間を示す．その後，j 指値注文の選択方法と市場動向について分析する．

ある取引者が流動性を提供するj-指値注文を提示したとする (流動性を提供するため $j>0$)．その次の価格改善をする取引者が到着時の指値注文をk-指値注文とするならば，k が取りうる範囲は $k \in \{0,\ldots,s-1\}$ となる．前節の最適戦略の決定より，最良気配値とスプレッド j に依存して指値を決定するため，指値 k を選択する確率を α とすると，k-指値注文の取引者が売り手の場合 $\alpha_k(j,b)$，買い手の場合 $\alpha_k(j,a)$ と表現できる．この確率を用いて，取引者の選択する指値と期待執行時間の関係を以下に示す．

補題 1. 流動性を供給するj-指値注文の期待執行時間は，以下のように再帰的に表現される．ここで $j>0$ を満たす．

$$T^{Buy}(j,a) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{M-a+1}} & \textit{if } j=1 \\ \frac{1}{\alpha_0(j,a)}\left(\frac{1}{\lambda_{M-a+j}} + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k(j,a) T^{Sell}(k,a-j)\right) & \textit{if } j \in \{2,\ldots,s-1\} \ \& \ \alpha_0(j,a) \neq 0 \\ \infty & \textit{otherwise} \end{cases}$$

$$T^{Sell}(j,b) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{b+1-M}} & \textit{if } j=1 \\ \frac{1}{\alpha_0(j,b)}\left(\frac{1}{\lambda_{b+j-M}} + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k(j,b) T^{Buy}(k,b+j)\right) & \textit{if } j \in \{2,\ldots,s-1\} \ \& \ \alpha_0(j,b) \neq 0 \\ \infty & \textit{otherwise} \end{cases}$$

Proof. 売り注文と買い注文は対称なため，買い注文時の証明を記す．仮定 A5 より，$j=1$ の指値注文後の価格改善する取引者は $k=0$ の指値注文を入れる．従って，このタイミングで約定される．すなわち，$j=1$ の指値注文の取引者の指値が $p_{Buy}=a-1$ である場合，仮定 A6 より次のトレーダーの期待到着間隔は $\frac{1}{\lambda_{M-a+1}}$ であり，これが期待執行時間となる．

再び仮定 A5 より，$j>1$ の指値注文を入れた後の価格改善する取引者の指値注文は $k \in \{0,\ldots,j-1\}$ の範囲である．まず $k=0$ の場合，j-指値注文の執行時間は $\frac{1}{\lambda_{M-a+j}}$ であり，その期待執行時間は $\alpha_0(j,a)\frac{1}{\lambda_{M-a+j}}$ となる．一方 $k>1$ の場合，j-指値注文はk-指値注文が約定後に約定される．このk-指値注文の執行される時間は $T^{Sell}(k,a-j)$ であるため，j-指値注文が執行されるまでの時間は，$\frac{1}{\lambda_{M-a+j}} + T^{Sell}(k,a-j) + T^{Buy}(j,a)$ となる．２番目に価格改善する取引者がk-指値の注文を入れる確率は $\alpha_k(j,a)$ としているため，j-指値注文の期待執行時間は，$T^{Buy}(j,a) = \alpha_0(j,a)\frac{1}{\lambda_{M-a+j}} + \sum_{k=1}^{j-1}\left(\frac{1}{\lambda_{M-a+j}} + T^{Sell}(k,a-j) + T^{Buy}(j,a)\right)$ となる．さらに，$\alpha_0(j,a) \neq 0$ の際，上式を変形すると $T^{Buy}(j,a) = \frac{1}{\alpha_0(j,a)}\left(\frac{1}{\lambda_{M-a+j}} + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k(j,a) T^{Sell}(k,a-j)\right)$ となる．

一方，$\alpha_0(j,a)=0$ の際，期待執行時間は $T^{Buy}(j,a)=\infty$ となる． □

この補題より，期待約定時間は指値，次の価格改善する取引者の行動によって分類される．特に，次の取引者の到着間隔に影響を受ける．また，次の取引者が $k=0$ の指値注文を出す確率がゼロの場合，期待約定時間は無限大となる．したがって，このケースが発生するような指値で注文をするのは合理的ではない．

これ以降，取引者の最適戦略を詳細化し，ザラバ方式下での取引の特色を明らかにする．分析の簡素化のため，単位時間当たりの機会費用を全ての取引者で同質なものと仮定する．市場行動を分析するために，以下に２種類の指値を定義する．

定義 1. あるスプレッド s の下，以下の条件を満たすj-指値を留保スプレッド指値と呼ぶ（買い手の場合 $j^{Buy}_{R,a}$，売り手の場合 $j^{Sell}_{R,b}$）：

$$j^{Buy}_{R,a} = \min\left\{ j \in \Re^+ : j - \delta\frac{1}{\lambda_{M-a+j}} > 0 \right\}$$
$$j^{Sell}_{R,b} = \min\left\{ j \in \Re^+ : j - \delta\frac{1}{\lambda_{b+j-M}} > 0 \right\}$$

留保スプレッド指値は正の利得を得るための最小のj-指値を意味する．この留保スプレッド指値があるならば，価格改善する取引者は正の利得を得る指値が存在する．留保スプレッド指値は存在しないケースは，時間当たりの機会費用が非常に大きい場合，そして最良

気配値が中央値 M から大きく離れていて，到着間隔が加速度的に増えた状態の場合である．

この留保スプレッドを用い，直後の取引者がその注文を確実に取る（$k=0$）ようなj-指値のうち，最も利得の大きな指値になる j を，最適フラッシュ・スプレッドと呼び，以下に定義する．

定義 2. あるスプレッド s の下，以下の条件を満たす j-指値を最適フラッシュ・スプレッド（買い手の場合 $j^{Buy}_{F,a}$，売り手の場合 $j^{Sell}_{F,b}$）と呼ぶ：

$$
\begin{aligned}
j^{Buy}_{F,a} &= \arg\max_{j\in\Re \& j\le s-1}\Big\{ j-\delta\frac{1}{\lambda_{M-a+j}}>0 : \\
&\qquad\qquad j^{Sell}_{R,a-j}\ \textit{is infeasible.}\Big\} \\
j^{Sell}_{F,b} &= \arg\max_{j\in\Re \& j\le s-1}\Big\{ j-\delta\frac{1}{\lambda_{b+j-M}}>0 : \\
&\qquad\qquad j^{Buy}_{R,b+j}\ \textit{is infeasible.}\Big\}
\end{aligned} \tag{3}
$$

最適フラッシュ・スプレッドの注文直後の取引者は，$k=0$ 以外の合理的な価格改善する注文がないことが大きな特徴である．その存在条件は以下の通りである．

定理 1. 最適フラッシュ・スプレッドが存在する必要十分条件は以下の通り：

(1) 価格改善をする買い手にとって留保スプレッド $j^{Buy}_{R,a}$ が存在し，実現可能であり（$j^{Buy}_{R,a}\le s$），かつ

- *(1a)* $a>M$ あるいは
- *(1b)* $a\le M$ かつ $j^{Buy}_{R,a}=1$.

(2) 価格改善をする売り手にとって留保スプレッド $j^{Sell}_{R,b}$ が存在し，実現可能であり（$j^{Sell}_{R,b}\le s$），かつ

- *(2a)* $b<M$ あるいは
- *(2b)* $b\ge M$ かつ $j^{Buy}_{R,b}=1$.

Proof. 売り手と買い手が対称であるため，買い手のケース（1）についてのみ示す．まず，必要条件について示す．留保スプレッド $j^{Buy}_{R,a}$ が存在し，実現可能（$j^{Buy}_{R,a}\le s$）であるならば，$j^{Buy}_{R,a}$-指値注文は実現可能である．この注文に対して，新しい最良買い気配値は $b^{new}=a-j^{Buy}_{R,a}$ となり，新しいスプレッドは $s^{new}=j^{Buy}_{R,a}$ となる．**(1a) の場合**：$a>M$ を満たすなら，価格改善をする次に来る売り手の$j^{Buy}_{R,b^{new}}$-指値注文が即時に約定されるためには，スプレッド s^{new} は $j^{Buy}_{R,b^{new}}$ より広い必要があるが，これは実現不可能（最適フラッシュ・スプレッドの条件の一つを満たす）．よって，最適フラッシュ・スプレッドであるための最大条件以外の条件を満たしている．もしも，$j'-\frac{\delta}{\lambda_{M-a+j'}}\le 0$ for all $j'>j^{Buy}_{R,a}$ であるならば，$j^{Buy}_{F,a}=j^{Buy}_{R,a}$ となる．それ以外の場合，$j^{Buy}_{R,a}\le j'<s$ の中に $j^{Buy}_{F,a}$ が存在する．**(1b) の場合**：$a\le M$ と $j^{Buy}_{R,a}=1$ を満たすなら，$j^{Buy}_{R,a}$-指値注文は次の価格改善をする取引者によって対当される．よって，最適フラッシュ・スプレッドの条件は最大値条件以外を満たしている．以下の条件を満たす j' を考慮する場合，$j'>j^{Buy}_{R,a}$, $j'\le s$，そして $j'-\frac{\delta_i}{\lambda_{M-a+j'}}>0$ ならば，$j^{Sell}_{R,a-j'}$-指値注文の有効性を確認する．前提である $a\le M$ と $j^{Buy}_{R,a}=1$ より，$j'\ge 2$ を満たす．したがって， $j^{Sell}_{R,a-j'}=1$ は実現可能で，その直後の売り手によって対当されるため，有効である．つまり，上記の j' は最適フラッシュ・スプレッドの条件を満たさない．したがって，$j^{Buy}_{F,a}=1$ となる．

次に十分条件を示す．もしも $j^{Buy}_{R,a}$ が存在しない，あるいは $j^{Buy}_{R,a}>s$ であれば，最初の買い手は常に $j=0$ の指値注文を出す．これは条件を満たさない．もしも，$a\le M$ で $j^{Buy}_{R,a}>1$ であるならば，$j^{Buy}_{R,a}$-指値注文は有効でない（ケース (1b) で示した通り）． □

上記より，取引者が $j=0$ の指値注文を出す条件が以下のように得られる．

定理 2. 取引者が $j=0$ の指値注文を出すことが戦略的均衡である条件は,

(1) 最初に価格改善する買い手にとって

- *(1a)* $j^{Buy}_{R,a}$ が存在しない*;*
- *(1b)* $j^{Buy}_{R,a}>s$ を満たす*;*
- *(1c)* $a\le M$，そして $j^{Buy}_{R,a}>1$ を満たす.

(2) 最初に価格改善する買い手にとって

- *(2a)* $j^{Sell}_{R,b}$ が存在しない*;*
- *(2b)* $j^{Sell}_{R,b}>s$ を満たす*;*
- *(2c)* $b\ge M$，そして $j^{Sell}_{R,b}>1$ を満たす.

Proof. 補題 1 および定理 1 より導かれる．紙面の都合上，省略． □

この定理より，留保スプレッドの存在，および留保スプレッドと実際のスプレッドの関係，および現在の最良気配値のポジションにより，$j=0$ の指値注文を出す条件が決定される．

補題 1，定理 1，および定理 2 よりザラバ方式での市場の定常状態を以下に示す.

定理 3. ある一定期間以上の時間の経過とともに，定常価格が存在する.

Proof. 買い手がはじめに到着した場合について示す．**ケース (1)**: 第１の買い手（価格改善する）が$j^{Buy}_{F,a}$-指値注文（最適フラッシュ・スプレッド）を出す．この場合，定理１より: **ケース (1a)** $j^{Buy}_{R,a}$ が存在する，$j^{Buy}_{R,a} \leq s$ そして $a > M$ を満たす，あるいは**ケース (1b)** $j^{Buy}_{R,a}$ が存在し，$j^{Buy}_{R,a} \leq s$，$a \leq M$，$j^{Buy}_{R,a} = 1$ を満たす．後続の売り手（第２の取引者）はこの注文に対当する注文を出す（最適フラッシュ・スプレッドの定義より）．約定価格は $a - j^{Buy}_{F,a}$ である．後続の買い手（第３の取引者）は初期の状態と同一であるため，その後の行動は同一となる．**ケース (2)**:それ以外の場合，定理１より，第１の買い手は流動性を享受する注文を出し，約定価格は a となる．注文板が薄い場合には，最良売り気配値は高くなりスプレッドは広がる．それ以外の場合には，最良気配値とスプレッドに変化はないため初期状態と変化がない．したがって，前者の場合を以後に示す．新しい最良売り気配値を a' とする．後続の売り手（第２の取引者）は２つのケースが存在する．**ケース (2-1)**: 以下のいずれかのケースでは同一の結果となる．**ケース (2-1a)**$j^{Sell}_{R,b}$ が存在し，$j^{Sell}_{R,b} \leq s'$ そして，$b < M$ を満たす，あるいは**ケース (2-1b)**$j^{Sell}_{R,b}$ が存在し，$j^{Sell}_{R,b} \leq s'$，$b \geq M$，そして $j^{Sell}_{R,b} = 1$ を満たす場合，定理１より，売り手（第２の取引者）は$j^{Sell}_{F,b}$-指値注文を出す．そして後続の買い手（第３の取引者）はこの注文に対当する注文を出し約定価格は $b + j^{Sell}_{F,b}$ となる．後続の売り手（第４の取引者）はケース (2-1) の初期状態と同一であり，それ以降の行動は同一となる．**ケース (2-2)**:それ以外の場合，定理１より，後続の売り手（第２の取引者）は流動性を享受する注文を出し約定価格は b となる．最良買い気配値が安くなり，スプレッドが広がった状態を考える（ケース (2) の初期状態と同様に）．新しい最良買い気配値を b' とする．後続の買い手（第３の取引者）はケース (1)，あるいはケース (2) の状態のいずれかと同一である．それ以降の状態は再帰的であるが，約定価格は値幅制限内であるため，A あるいは B を超える指値では注文を出さない．後続の取引者はこの注文を取るため，約定価格は A あるいは B となる． □

この定理の証明内に，ザラバ方式下での約定価格のパターンを図２に示した．括弧でくくられているペアを最良気配値（売り気配, 買い気配）の状態とする．図では価格改善する取引者が買い手がはじめに来たパターンを示す．この場合，流動性を提供する $j > 0$ の指値注文を出す場合と流動性を享受する $j = 0$ の指値注文を出す場合の２つのケースに分類される．前者を LO と記す，後者を MO と記す．LO の下に書かれている価格は指値で，MO の下に書かれている価格は約定価格を意味する．LO を出す条件は，定理３に示した条件を満たさない場合であり，その際，最適フラッシュ・スプレッドの指値を出す．後続の売り手は，この注文を取るような注文 ($j = 0$) を出し，これを繰り返す．最初の買い手が MO を出す条件は定理３に示した通りで，現在の最良気配値で約定される．注文板に同一価格の注文が複数以上ある場合には，最良気配値に変更はない．図ではこの気配値が変更された場合（スプレッドが開いた場合）を示している．この場合，後続の売り手の意思決定は，最初の買い手の意思決定と対称な構造である．連続して MO が続きスプレッドが開いていった場合，最大で制限値幅まで最良気配値は広がっていく．

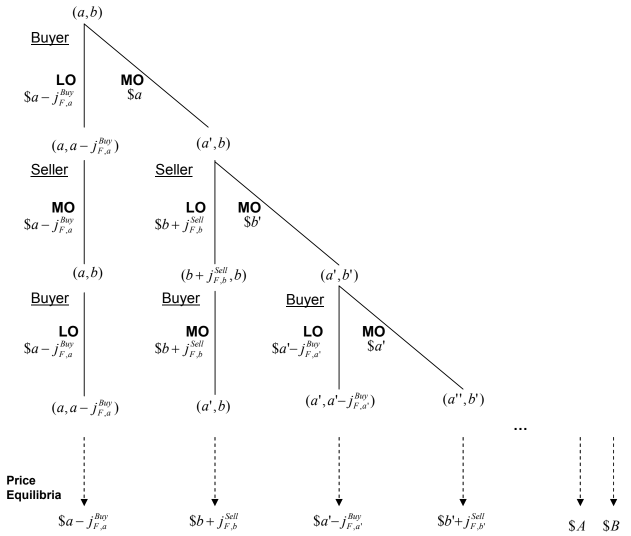

図 2: 定常状態での約定価格への推移

これらの取引パターンより，ザラバ方式下での約定間隔の特色を以下のように示すことができる．

定理 4. 定常価格に近づくにつれ，約定間隔が長くなる（スピードが遅くなる）．

Proof. 取引パターンの中で流動性の供給と流動性の享受の繰り返しの部分（買い手が$j^{Buy}_{F,a}$-指値注文を出し，後続の売り手がこの注文に対当する注文を出す）に焦点をあてる．この部分の初期状態として最良気配値が (a, b) であったとする．この場合の期待約定時間は $\frac{1}{\lambda^{Buy}_{a-M}} + \frac{1}{\lambda^{Sell}_{M-b}}$ である．この部分の直前の場合（買い手と売り手が流動性を享受する）を考える．最良気配値が (a', b') ここで $a' < a$ かつ $b' > b$ とする．定理３より，２つの注文の到着間隔は $\frac{1}{\lambda^{Buy}_{a'-M}}$ と $\frac{1}{\lambda^{Sell}_{M-b'}}$ であるため，この２つの注文の平均約定間隔は $\frac{1}{2}(\frac{1}{\lambda^{Buy}_{a'-M}} + \frac{1}{\lambda^{Sell}_{M-b'}})$ である．条件 $a' < a$ と $b' > b$ は，$\frac{1}{\lambda^{Buy}_{a'-M}} < \frac{1}{\lambda^{Buy}_{a-M}}$ と $\frac{1}{\lambda^{Sell}_{M-b'}} < \frac{1}{\lambda^{Sell}_{M-b}}$ 関係を示す．したがって，流動性の提供と流動性の享受の繰り返しの部分は，連続した流動性を享受する部分より長い約定間隔となる．

ここで，流動性を享受する注文を繰り返している部分について比較する．初期の最良気配値を (a'', b'') とし，$a'' < a'$ と $b'' > b'$ を満たすとする．平均約定間隔は $\frac{1}{2}(\frac{1}{\lambda^{Buy}_{a''-M}} + \frac{1}{\lambda^{Sell}_{M-b''}})$ となる．これより以下の関係を満たす．

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{\lambda^{Buy}_{a''-M}} + \frac{1}{\lambda^{Sell}_{M-b''}}) < \frac{1}{2}(\frac{1}{\lambda^{Buy}_{a'-M}} + \frac{1}{\lambda^{Sell}_{M-b'}}). \quad (4)$$

すなわち，流動性を享受する注文を繰り返しつつ最良気配値は中央値 M に近づく場合（偏りを少なくする），約定間隔は遅くなる． □

この定理では，取引を繰り返し市場が定常状態に近づくにつれ，約定間隔が長くなっていくことを示している．これはザラバ方式下で以下の特徴を持つことを示している

1. 注文板の状態が偏っている場合，約定スピードが速い
2. 日中の中だるみ
3. 大引けに向け約定スピードが速い

朝や昼の板寄せの結果により，注文板に偏りが生じているならば，約定スピードが速く，安定的な処理であれば日中で定常状態に向かい約定スピードが遅くなる．大引けに向け約定スピードが上がる理由の一つとして，j-指値注文による期待執行時間が大引けより遅くなるならば，期待利得はゼロになるため，流動性を享受する注文に変更すること合理的であることが挙げられる．

3.2 板寄せ方式での分析

板寄せ方式では，公開型の第 1 価格ダブルオークションと考えることができる．したがって，全ての取引者が提示された注文の価格を考慮できるとし，それに対して合理的な指値を決定できたとする．この場合，板寄せ方式で得られる価格は以下のように競合的な価格となる．

定理 5. 全ての取引者が事後的に価格を決定できる場合，板寄せ方式によって得られる約定価格 $\tilde{p}$ は，競合的な価格となる．

Proof. 売り手と提示する価格を $p^{(1)}_{Sell}, \ldots, p^{(NS)}_{Sell}$，買い手の提示する価格を $p^{(1)}_{Buy}, \ldots, p^{(NB)}_{Buy}$ とし，約定できる数量を NC とする．この場合，約定された注文の取引者にとって合理的な指値を提示していれば，約定によって得られる利得は正となる．NC 番目より大きな番号の取引者は，約定されないので利得はゼロとなる．買い手にとって利益が負にならない範囲で指値を高くすることができ，かつ $\tilde{p}$ より低い価格である場合，この取引者の注文は約定され正の利得を得られる．しかしながら，この操作により逆転された取引者も同様の操作をすることにより約定対象の注文となる．また，売り手にとっても同様なことが言えるため，最終的に得られる約定価格 $\tilde{p}$ は競合的な価格となる． □

この結果は伝統的な結果と同様である．売り手と買い手のバランスが取れている場合，約定価格は $\tilde{p} = M$ となる．が，全ての取引者が合理性を有さない場合，約定価格は偏ったものになる．また，大口取引者が存在する場合，完全な調整ができないため，競合的な価格から離れることが言える．一方，この結果からは最良気配値については競合的な値を取るとは言えず，偏りが発生する可能性もありえる．

3.3 ザラバ方式と板寄せ方式の比較分析

ここでザラバ方式と板寄せ方式の比較を約定の観点から行う．前節で示したように，ザラバ方式での定常状態はユニークではないので，板寄せ方式で得られる競合的な価格である中心値 M で約定される価格のケースのザラバ方式を考慮する．

ザラバ方式での取引の例として，買い手が価格 M の指値の注文を出し，直後に売り手がこの注文を取る場合を考える．この際，最良売り気配値が $M+1$ とすると，価格改善する最初の買い手の期待到着間隔は $\frac{1}{\lambda_1}$ である．また，この注文を取る後続の売り手の期待到着間隔は $\frac{1}{\lambda_0}$ となる．従って，期待約定間隔は $\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1}$ となる．

ザラバ方式と比較するために，板寄せ方式で価格改善する取引者の到着間隔をモデル化する．すなわち，価格 M より高い価格の買い注文と安い価格の売り注文の到着間隔を規定する．ザラバ方式での価格改善する期待到着間隔は，現時点の最良気配値に基づいており，これを板寄せ方式に当てはめると，競合的な価格 M に基づいた期待到着間隔として規定することができる．しかしながら，ザラバ方式と板寄せ方式では期待利益の構造が異なるため，ザラバ方式での期待到着をそのまま適用することが不可能である．ザラバ方式でモデル化された到着間隔は，買い手の場合 $v_i - a$ が正の値となる取引者の到着間隔であり，売り手の場合 $b - v_i$ が正となる取引者の到着間隔である．板寄せ方式では買い手の場合 $v_i - \tilde{p} - \gamma$ が正となる取引者の到着間隔，および売り手の場合 $\tilde{p} - v_i - \gamma$ が正となる取引者の到着間隔が必要である．ここで，η をザラバ方式での到着間隔を板寄せ方式での到着間隔に変換する係数とする．すなわち η は，板寄せ方式での待ち時間によって到着する取引者の減衰する係数であり $0 < \eta \leq 1$ とする．すると，価格 M での取引者の到着間隔は $\frac{1}{\eta}\frac{1}{\lambda_0}$ とな

る．したがって，対当する売り手と買い手の到着間隔は $\frac{1}{\eta}\frac{2}{\lambda_0}$ で，これはザラバ方式での約定間隔に対応する．この減衰係数は板寄せ方式での固定された約定タイミングによる待ち時間による損失の度合いに対応するため，ザラバ方式で約定スピードの速い銘柄ほど，この係数の値は小さくなる．損失が全くない銘柄（$\eta = 1$）の場合，板寄せ方式での対当する売り手と買い手の到着間隔は $\frac{2}{\lambda_0}$ となり，ザラバ方式より短い間隔となることが分かる．

上記から，板寄せをするために連続取引を停止している時間は，価格改善する取引者の約定時間に関する機会損失に影響を与える．すなわち，約定までの機会費用が極めて小さい場合，そしてザラバ方式下で約定間隔が長い銘柄（流動性が低い銘柄）に関しては，損失係数は高く維持され，板寄せ方式によるメリットが生じる．一方，約定までの機会費用が大きい銘柄や流動性が高い銘柄では，損失係数により価格改善する取引者の数が減ることにより，約定数量は板寄せ方式による減少が見られる．

4 まとめ

本論文では注文板を利用したザラバ方式と板寄せ方式での取引者の最適戦略の分析を行った．特に，ザラバ方式では多期間に亘るダイナミックなモデルを考慮し，FKK のモデル [2] で表現されていない取引の U-字形の説明を含む．その説明のために最適フラッシュ・スプレッドを定義し，この考え方にしたがって最適戦略の分類を行った．本モデルの特徴は，取引者の最適戦略および約定価格の変化は，最良気配値，中間値，そして現在のスプレッドの状況に応じることを示した．

本論文では典型的な理論モデルと異なり，取引者の最適戦略の結果を用いて取引制度の特色を考察している．ザラバ方式と板寄せ方式の取引制度の違いによる性能評価に約定数量を用いた．合理的な取引者が均質的に存在する場合，板寄せで必要な固定の待ち時間による損失度合いに応じて結果が逆転することを示した．典型的には，ザラバ方式で流動性の高い銘柄ほど，あるいは板寄せによる待ち時間が長い状況ほど，ザラバ方式による約定の観点からのメリットは大きくなる．

上記の比較は約定数量にとどまり，板寄せ時の板の厚みの分析が含まれておらず，板寄せ直後の流動性の増加に関する分析がなされていない．また，本論文ではいくつかの強い仮定のもとに分析がなされている．まず，注文数量が均質であること．実際の市場では大口取引の影響は非常に大きい．板寄せ方式とザラバ方式では，大口取引のマーケットインパクトが異なると考えられ，この点に関する分析が必要である．また，取引者の機会損失に関する仮定として，均質的な場合について考察しており，非均質的な場合，後続の取引者の取引パターンが広がるため，最適フラッシュ・スプレッド以外の戦略も解となることが想定される．これらの点を分析するために今後の研究として市場データを利用して実証分析を行う．また，市場での取引銘柄の価値が急激に下落あるいは高騰した際，取引制度の違いによる性能に違いがあるかについては重要な研究内容である．これらのデータは実際の市場データでは出現回数に制限があるために分析が困難である．そのために，実験による研究を今後実施していく．

参考文献

[1] A. R. Admati and P. Pfleiderer, *A Theory of Intraday Patterns: Volume and Price Variability*, The Review of Financial Studies, 1 (1), pp. 3-40, 1988.

[2] T. Foucault, O. Kadan and E. Kandel *Limit Order Book as a Market for Liquidity*, The Review of Financial Studies, 18 (4), pp. 1171-1217, 2005.

[3] L. R. Glosten and P. R. Milgrom, *Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders*, Journal of Financial Economics, 14 (1), pp. 71-100, 1985.

[4] A. S. Kyle, *Continuous Auctions and Insider Trading*, Econometrica, 53 (6), pp. 1315-1335, 1985.

[5] B. N. Lehmann and D. M. Modest, *Trading and Liquidity on the Tokyo Stock Exchange: A Bird's Eye View*, The Journal of Finance, 49 (3), pp. 951-984, 1994.

[6] C. A. Parlour, *Price Dynamics in Limit Order Markets*, The Review of Financial Studies, 11, pp. 789-816, 1998.

[7] C. A. Parlour and D. J. Seppi, *Liquidity-Based Competition for Order Flow*, The Review of Financial Studies, 16 (2), pp. 301-343, 2003.

[8] I. Rosu, *A Dynamic Model of the Limit Order Book*, The Review of Financial Studies, 22 (11), pp. 4601-4641, 2009.

A Dynamic Model of the Limit Order Book

[9] D. J. Seppi, *Liquidity Provision with Limit Orders and Strategic Specialist*, The Review of Financial Studies, 10 (1), pp. 103-150, 1997.