

外国為替市場における収益率分布のテールインデックス推定

Estimating the tail index of distributions : Case study on the foreign exchange market

中本武志^{1*} 佐藤彰洋¹
Takeshi Nakamoto¹ Aki-Hiro Sato¹

¹ 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

¹ Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics,
Kyoto University

Abstract: We study unconditional distribution derived from the Fokker-Planck equation for an artificial market. The artificial market consists of two kind of participants; fundamentalists and chartist(noise traders). We compute parameter estimates for absolute-log-return time series of exchange rates by means of the maximum likelihood method. We compare the model-based tail index with Hill's estimators.

1 はじめに

外国為替市場は、土曜日曜を除き 24 時間取引が行われており、各通貨間の取引価格が常に変動している。取引価格は各国の政治、経済その他の情報により影響を受ける。また、現在は取引がコンピューターにより構成されるネットワーク上で行われるため、様々な情報が瞬時に共有され、短時間のうちに取引価格が大きく変動し、大きな利益あるいは損失となる場合がある。

そのため、大きな変動に対するリスクの推定が研究されている。本研究ではマルコフスイッチングモデルである Alfrano-Lux モデル [1][2] を用い、群行動を考慮したエージェントモデルから利得の分布を導出する。そして、外国為替市場の実証データからパラメータを推定し、通貨ペアごとにリスクの評価を行う。

2 エージェントモデル

Alfrano-Lux モデルの基礎に Kirman の Ant モデル [3] がある。Kirman は、二箇所の異なるエサを集めるアリの行動から、異質で相互作用するエージェント間の情報伝達に対する単純な統計モデルを考案した。また、Kirman はアリを外国為替市場の参加者、2 種類のエサを各エージェントの相場に対する戦略に置き換えることで、外国為替市場に対するモデルとした。

2.1 群行動を考慮したエージェントの状態遷移

外国為替市場参加者は 2 状態 (fundamentalist, chartist) を持つとする。以下では chartist 状態の市場参加者の分布を考える。chartist の人数 n の増減の遷移確率は次のようにする。

$$\pi_+(n) = (N - n)(a_1 + bn) \quad (1)$$

$$\pi_-(n) = n(a_2 + b(N - n)) \quad (2)$$

さらに、 a_1, a_2 は状態を変更するための固有パラメーター、 b は群行動を表すパラメーターである。この遷移確率から次のマスター方程式が導かれる。

$$\frac{\Delta \bar{\omega}_n(t)}{\Delta t} = \bar{\omega}_{n+1} \pi_-(n+1) + \bar{\omega}_{n-1} \pi_+(n-1) - \bar{\omega}_n \pi_-(n) - \bar{\omega}_n \pi_+(n) \quad (3)$$

さらに、 $N \rightarrow \infty$ とし、 $z = n/N$ とすると式 (3) を Fokker-Planck 方程式に変形することができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(z, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} (A(z) \omega(z, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (D(z) \omega(z, t)) \\ A(z) &= a_1 - (a_1 + a_2)z \\ D(z) &= 2b(1 - z)z \end{aligned} \quad (4)$$

2.2 エージェントの定常分布

式 (4) の Fokker-Planck 方程式の定常分布 $w_0(z)$ は、人数の割合に対する均衡分布を与え、

$$w_0(z) = \frac{1}{B(\epsilon_1, \epsilon_2)} z^{\epsilon_1-1} (1 - z)^{\epsilon_2-1} \quad (5)$$

*連絡先： 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
E-mail: tnakamoto28@amp.i.kyoto-u.ac.jp

となる。ここで、 $B(\epsilon_1, \epsilon_2)$ はベータ関数であり、

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

で与えられる。また、 $\epsilon_1 = a_1/b, \epsilon_2 = a_2/b$ となるため、定数 a_1, a_2, b の大きさによらず、比 ϵ_1, ϵ_2 によって $\omega_0(z)$ の形状が決まる。例を図に示す。

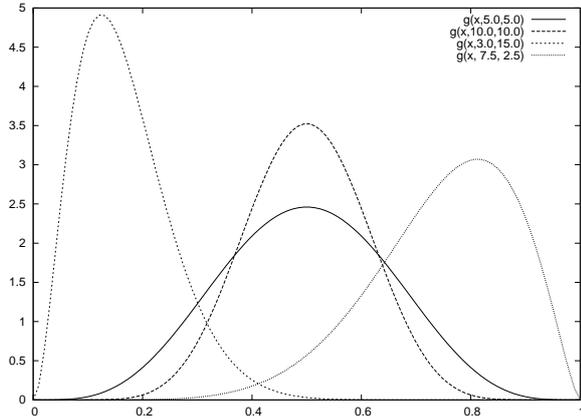


図 1: エージェントの定常分布の例。左のグラフが $\epsilon_1 < \epsilon_2$ の場合で、右のグラフは $\epsilon_1 > \epsilon_2$ の場合である。中央の 2 つのグラフは $\epsilon_1 = \epsilon_2$ で ϵ_2 が小さくなるほど裾が厚くなる。

3 価格決定システム

3.1 トレーダーの種類

本モデルでは、定数 N 人のトレーダーが、それぞれ次の 2 種類の戦略のどちらかを採用とする。

fundamentalists 為替相場の実際の価格と想定価格の高低によって買うか売るかを決定する

chartist(noise traders) 根拠のない信念や雰囲気などに従い買うか売るかを決定する

本モデルでは簡単のため、fundamentalist の予想価格 p_F は一定であるとする。また、各戦略を採用する市場参加者の人数の変化は前節での過程に従うとする。

3.2 取引価格の決定方法

市場での取引価格は需要と供給から決定されるとする。fundamentalists の超過需要を以下のようにする。

$$ED_F = N_F \ln \frac{p_F}{p}$$

chartists(noise traders) の超過需要は以下のようにする。

$$ED_C = r_0 N_C \xi$$

ここで、 r_0 は価格形成において noise traders が与える影響を表しており、 ξ は noise traders 全体の雰囲気を表している（買いなら正、売りなら負の値を取る）。

需要と供給が釣り合う価格 ($ED_F + ED_C = 0$ における p) を均衡価格とし、市場での取引価格とする。取引価格は以下となる。

$$p(t) = p_F \exp \left(r_0 \frac{z(t)}{1-z(t)} \xi(t) \right)$$

ここで、 $z(t) = N_C$ としている。

3.3 対数収益率の無条件分布

対数収益率を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} r(t) &= \ln \frac{p_{t+\Delta t}}{p_t} \\ &= r_0 \frac{z(t)}{1-z(t)} \eta(t) \end{aligned}$$

ここで、 $\eta(t) = \xi(t + \Delta t) - \xi(t)$ であり、 z の変化は ξ の変化に比べて遅いとして近似している。ノイズ η の選び方は任意であるが、今回は $[-1.0, 1.0]$ の一様乱数を採用し、0 に対して左右対称となるため、対数収益率の絶対値 $v = |r|$ の分布を求めている。 v の確率密度関数は以下ようになる。

$$p_u(v) = \frac{1}{r_0} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 - 1} \left[1 - \beta \left(\frac{v}{v+r_0}; \epsilon_1 - 1, \epsilon_2 + 1 \right) \right] \quad (6)$$

ここで、 $\beta(x; a, b)$ は正規化された不完全ベータ関数であり、

$$\beta(x; a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

と定義される。

3.4 べき指数

正規化された不完全ベータ関数の性質より

$$p_u(v) \sim v^{-(\epsilon_2+1)} \quad (7)$$

を得る。よって、 $p_u(v)$ はべき分布で与えられ、べき指数は ϵ_2 となる。

4 推定結果

式 (6) 中のパラメーター $\epsilon_1, \epsilon_2, r_0$ を外国為替市場の実証データから最尤推定する。ここで、 $E[v] = 1$ ならば $r_0 = 2(\epsilon_2 - 1)/\epsilon_1$ となるので、今回は ϵ_1, ϵ_2 の 2 つを推定している¹。

推定に用いるデータは Pacific Exchange Rate Service^[4] からダウンロードした 30 通貨ペア² の 2000 年 1 月 4 日から 2010 年 12 月 31 日までの日時データ (2760 レコード) である。対米ドル、対日本円での各通貨ペアの推定結果をそれぞれ表 1, 表 2 に示す。各表は $\hat{\epsilon}_2$ の大きさの降順にソートしてある。 $\hat{\epsilon}_2$ が大きい通貨ほど、ボラティリティの変動は小さく、反対に $\hat{\epsilon}_2$ が小さい通貨ほどボラティリティの変動は大きい。表の下部に行くほど大きな変動が起きる確率の高い通貨ペアであると言える。右側の図は ϵ_1 と ϵ_2 を軸に各通貨ペアの位置をプロットしたものである。左上 ($\epsilon_1 < \epsilon_2$) に行くほど裾が薄く、fundamentalists が支配的で、右下 ($\epsilon_1 > \epsilon_2$) に行くほど裾が厚く、noise traders が支配的となっている。表 1, 2 図から、対米ドル市場は fundamentalists が支配的な通貨ペアと noise traders が支配的なペアに分かれているが、対日本円市場では比較的固まっていることが確認できる。

Hill's estimator^{[5][6]}³ との比較であるが、 ϵ_2 が小さい値では大きな違いは見られないが、 ϵ_2 が大きくなると、乖離が出てくる。これは Hill's estimator が標本の上位数%がべき分布に従うと仮定しているため、 ϵ_2 が大きいところでは r_0 も大きくなり、式 (7) が成り立つ分位点が大きくなってしまい、べきに従う部分の標本が観察されないためであると考えられる。しかし、図 2, 3 からわかるように $r(t)$ が正規分布に従うと仮定した場合の確率密度関数に比べ、式 (6) の確率密度関数はよりデータに合致しているといえる。

5 まとめ

本研究では、非対称な群行動を考慮したエージェントの分布と、市場での価格の決定方法からある期間での利得の分布を求め、通貨ペアごとのべき指数の比較を行った。今後の課題として、本研究を通貨ポートフォリオのマネジメントに用いることが挙げられる。また、より短いタイムスケールの標本の分析を行ない、時間の違いによる特徴の差異を観察したい。

参考文献

- [1] S. Alfarano, T. Lux, F. Wagner.: Estimation of agent-based models: the case of an asymmetric herding model, *Computational Economics*, 26:19–49, (2005)
- [2] S. Alfarano, T. Lux, F. Wagner.: Excess Volatility and Herding in an Artificial Financial Market: Analytical Approach and Estimation, *MPRA Paper*, No.24719, (2010)
- [3] A. Kirman.: Ants, rationality, and recruitment, *Quarterly Journal of Economics*, 108, pp.137–156, (1993)
- [4] Pacific Exchange Rate Service: <http://fx.sauder.ubc.ca/data.html>
- [5] Hill, B. M.: A simple general approach to inference about the tail of a distribution, *Annals of Statistics*, 3, 1163–1173, (1975)
- [6] A. Clauset, C. R. Shalizi, M. E. J. Newman.: Power-law distributions in empirical data, *SIAM Review*, 51, pp.661–703, (2009)

¹尤度関数が多峰性を示すため、パラメーターの初期値をランダムに変え 1000 回行い、尤度が最大となったものを採用している。

²AUD, BRL, CAD, CHF, GBP, MXN, NZD, SGD, ZAR の対 USD, 対 JPY, 対 EUR と USD/JPY, EUR/USD, EUR/JPY

³標本の上位数%がべき分布に従うと仮定したときのべき指数の最尤推定量

/USD	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	HE(5%)	HE(1%)
EUR	3.138	74.789	5.28	5.61
CHF	3.392	43.317	5.40	6.24
JPY	3.629	17.503	4.68	5.80
GBP	4.323	10.123	4.34	5.38
CAD	3.441	8.989	4.36	4.42
NZD	4.125	8.498	4.38	4.73
ZAR	4.085	8.319	4.12	4.56
SGD	4.701	8.054	3.97	4.83
AUD	8.637	4.765	3.70	3.44
BRL	6.175	4.052	3.38	4.97
MXN	66.893	3.535	3.44	3.59

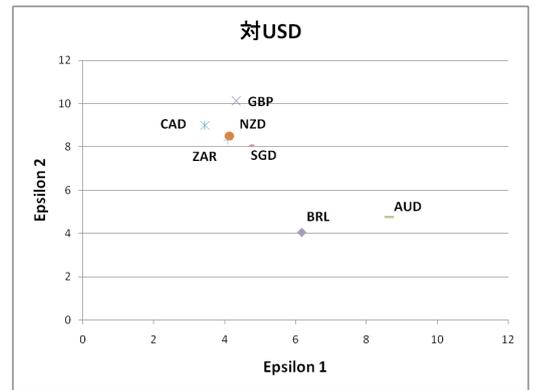


表 1: 対米ドルのパラメータ推定結果。

/JPY	$\hat{\epsilon}_1$	$\hat{\epsilon}_2$	HE(5%)	HE(1%)
USD	3.629	17.503	4.68	5.80
CHF	4.208	9.989	4.72	5.22
CAD	5.325	5.788	4.07	3.90
EUR	5.367	5.786	4.55	4.69
SGD	5.832	5.751	4.22	5.10
GBP	4.384	5.710	3.70	4.56
NZD	3.716	5.674	4.35	4.38
ZAR	10.120	4.851	4.06	4.45
MXN	8.975	4.801	3.88	4.67
BRL	6.576	4.446	3.82	4.33
AUD	6.795	3.548	3.59	3.53

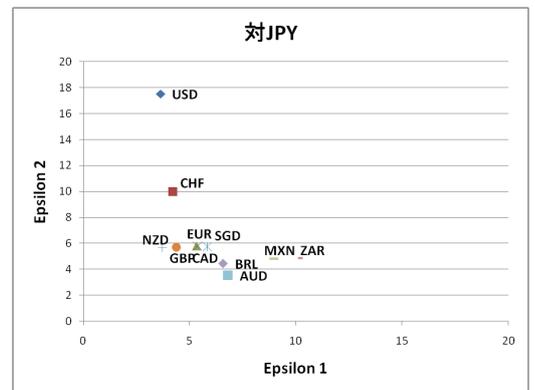


表 2: 対日本円のパラメータ推定結果

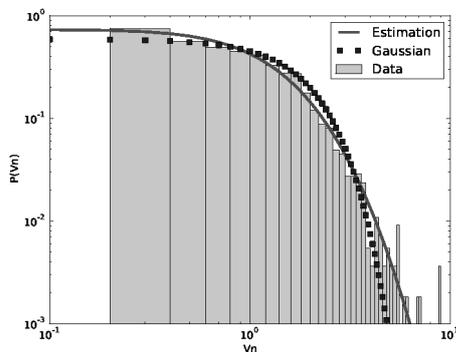


図 2: USDJPY の推定結果

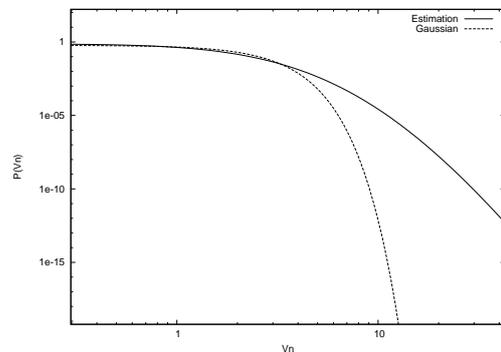


図 3: USDJPY における Fat tail 分布