

基礎となる確率的板モデルと投資家の群れ行動

Basic Stochastic Order-Book Model and Investors' Swarm Behaviors

一木信吾^{1*} 西成活裕²
Shingo Ichiki¹ Katsuhiro Nishinari²

¹ 東京大学大学院 工学系研究科

¹ The University of Tokyo, Graduate School of Engineering

² 東京大学 先端科学技術研究センター

² The University of Tokyo, Research Center for Advanced Science and Technology

Abstract: In this study, we studied large-scale price movements in the exchange market caused by investors' collective behaviors, and focused on the phenomenon created by local investors affecting each other and producing large-scale price fluctuations as a group, which we denote as swarm behaviors. We think one of the factors of large-scale price movement is connected with certain swarm behaviors of investors. First, we present a basic stochastic order-book model in the continuous double auction mechanism. Next, we incorporate a follower type of investors' swarm behavior in the basic stochastic order-book model. Our study shows a characteristic called "fat tail" is seen in the data obtained from our model that incorporates the investors' swarm behaviors. The result demonstrated that one of the reasons the trend following of price occurs is that orders temporarily swarm on the order book in accordance with past price trends.

1 導入

世界中の金融取引市場において様々な株式や派生商品が取引されている。これらの金融商品を取引する投資家にとって金融商品の価格変動リスクを適切に見積もることは取引する上で非常に重要なことである。過去に、価格変動リスクを見誤ったことで多額の損失を被った事例が多々ある。R. N. Mantegna and H. E. Stanley が行った研究では、現実の価格変動は正規分布に従うような理想的な状況とは異なることが示されている [1]。実際に様々な金融取引市場において正規分布から外れるような大規模な価格変動が観測されている。

大規模な価格変動が起こる要因の一つとして、過去の価格トレンドに追随するような注文が原因であることが経験的に知られている。Y. Hashimoto et al. は為替市場の実データを用いて、取引価格が過去の価格トレンドに依存する性質を持つことを示している [2]。ここでは、過去の価格トレンドに影響を受けて注文を行うような投資行動が大規模な価格変動を引き起こす一つの要因であるという仮説のもと、シミュレーションの観点から実証することを目的に研究を行った。特に過去の価格トレンドに追随して注文するような投資行動

を取り上げる。このような投資行動の集まりを群れ行動として捉え、確率的板モデルと呼ばれるシミュレーションモデルを用いることで価格変動にどのような影響が現れるか分析を行う。

2 基礎となる確率的板モデル

ここでは先駆的な確率的板モデルである Maslov モデルを参考に、基礎となる確率的板モデルを紹介する [3][4]。このモデルは、群れ行動の影響を比較分析するためのモデルである。設定方針は、最低限の現実の制度や性質を損なわない程度に簡略化したルールを設けることである。また、後に群れ行動を組み込んだ際に影響を比較し易いよう、できる限り価格変動に時系列相関がないようなモデルを考える。

2.1 売買ルール

まず注文ルールについて説明する。代表的な株式市場である株式会社東京証券取引所（以下、東証）では、注文の種類に指値注文、成行注文及び条件付注文がある。しかし、ここでは簡略化のため基本的に指値注文のみを考える。直近の約定値段から一定の値幅内において、ランダムに 1 単位の指値注文を行う仕組みを考

*連絡先：東京大学 先端科学技術研究センター
〒 153-8904 東京都目黒区駒場 4-6-1
E-mail: ichiki@jamology.rcast.u-tokyo.ac.jp

える。一方、ここでは注文数量を1単位と制限しているため、即時に約定する指値注文は成行注文と同様の効果がある。また、この注文可能値幅は直近の約定値段から±15と定める。この±15の幅は、シミュレーション回数との兼ね合いにより経験的に選ばれたものであって特別な意味は持たない。さらに、売り注文及び買い注文は確率 $\frac{1}{2}$ で選択されるものとする。

次に約定ルールについて説明する。ここではザラバのみを考える。板上の最良気配注文が「売り」≤「買い」となった場合に最良気配執行に基づいて売買を成立させる。具体例は図1のとおりである。まず、初期

Ask	Price	Bid
	?	
	102	
3	101	
	100	
	99	2
	98	
	?	

State 1

Ask	Price	Bid
	?	
	102	1 ← 1 unit
3	101	
	100	
	99	2
	98	
	?	

State 2

Ask	Price	Bid
	?	
	102	✕
2 ← ✕	101	
	100	
	99	2
	98	
	?	

State 3

図1: 売買成立の仕組み。

状態として、「売り101」に3単位、「買い99」に2単位の注文がある状態を考える。そして次の時刻に「買い102」に1単位の注文がなされたとすると、板上の最良気配注文が「売り」≤「買い」となり、最良気配である「売り101」と「買い102」の売買が成立する。このとき約定値段は101となる。

2.2 取消しルール

シミュレーションをするにあたり取消しルールを導入する。もし取消しを行わない場合、板に注文が残りに続けることから注文の厚みが増し、価格変動が限定的となり現実から乖離してしまう。ここで導入する取消しルールは、上記で設定した直近の約定値段から一定の値幅外にある注文を取消するという仕組みを考える。約定するとその約定価格に応じて注文可能値幅も動く。そのため約定前に注文可能値幅内にあった注文も状況に応じて注文可能値幅の外に出ることがあり、そのような注文を取消することにする。

近年では即時に対象銘柄の情報を取得することができ、直近の約定値段から大幅に離れた値段に注文を出すことは想定し難い。即時に同等の情報を取得できる投資家はおおよそ同様の理論価格を見積もっていると考えられる。これは投資家ごとに情報非対称性がない理想的な市場を想定したものと言える。また、東証の株式市場では気配の更新値幅が設定されている。これは直近の約定値段から一定の値幅を超えて注文が即時

約定することを制限する制度である。これらのことを背景に、直近の約定値段から一定の値幅外の注文について取消することにする。

2.3 シミュレーション結果

基礎となる確率的板モデルのシミュレーション結果を分析する。ここでは100万回のシミュレーションを10回行った際の約定データ(ティックデータ)を用いる。シミュレーション回数に対して約定割合は $29.05 \pm 0.05\%$ であった。

まず、図2がティックデータのサンプルパスである。ここでは3万ティックを取り出してグラフにしている。次に、ティックデータから時間スケールと価格差の標準

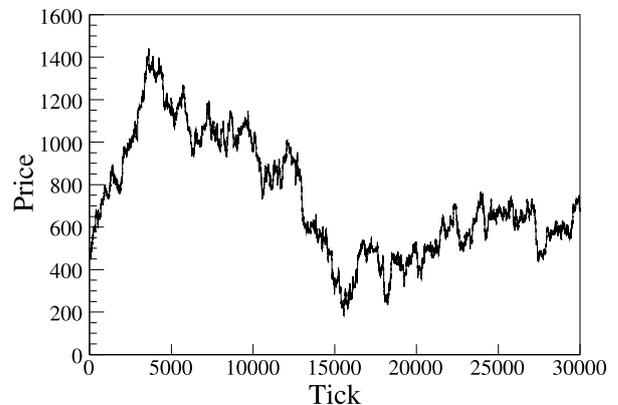


図2: 基礎となる確率的板モデルから得られたサンプルパス。

偏差の関係を調べた。図3のとおり、両対数グラフにおいて、時間スケールを大きくしていくと線形に標準偏差が大きくなっていることがわかる。点線はハースト指数0.5を表している。最後に、価格変動の大きさについて分析する。ここでは連続的に価格が大きく動いたときのリスクに興味があるため、連続的に一方向へ動いた価格の大きさに注目する。一般に、連続的に一方向へ動いた価格変動を分析する際、ドローダウン及びドローアップという指標が用いられる。ここでは単に価格の変動幅のみに着目するため下落方向または上昇方向の区別をしないこととする。つまり、ドローダウン及びドローアップの絶対値を用いる。この指標をここでは「ドローサイズ」と呼ぶことにする。図4はこのドローサイズの累積度数分布を片対数表示したものである。実線はドローサイズが16以上の累積度数分布を片対数グラフに対して線形近似した直線である。この直線の傾きは-0.04である。なお、時系列依存について調べるため、シミュレーションから得られた価格差のデータをシャッフルして時系列相関を取り除い

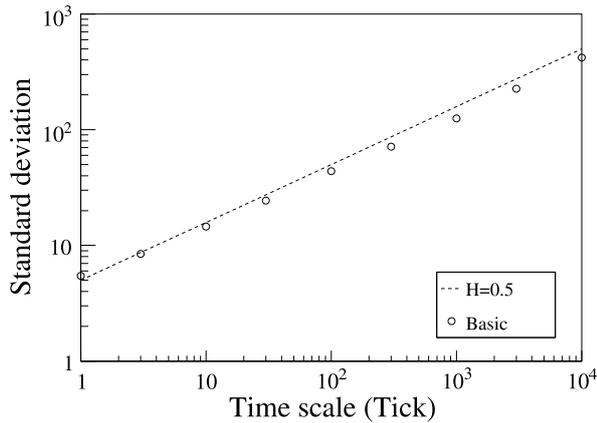


図 3: 基礎となる確率的板モデルの時間スケールと価格差の標準偏差の関係。

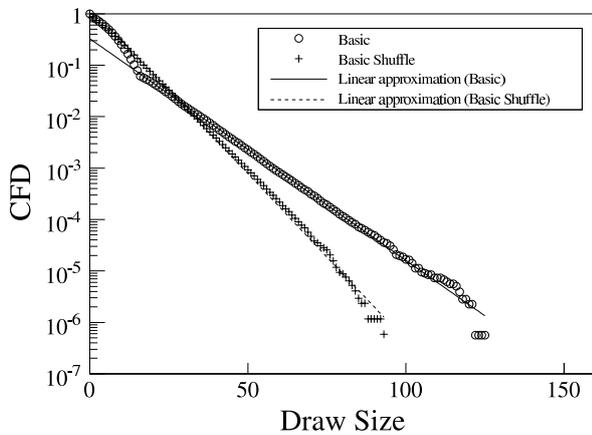


図 4: 基礎となる確率的板モデルから得られたドローサイズの累積度数分布。

たデータから取り出したドローサイズの累積度数分布についても併せて示した。さらにこの累積度数分布を片対数グラフに対して線形近似した直線を点線として示した。この直線の傾きは -0.06 である。

3 群れ行動を持つ確率的板モデル

ここでは基礎となる確率的板モデルに群れ行動を組み込んだモデルを紹介する [4]。約定ルール及び取消しルールは基礎となる確率的板モデルと同様とする。「群れ行動を組み込む」とは過去の価格トレンドに追随するように注文価格が選択されるようなルールを考えることである。つまり、過去の価格トレンドに追随して注文価格を決定する投資家が多数いる市場を想定していることになる。

3.1 群れ行動のルール

基礎となる確率的板モデルでは、注文可能値幅内にランダムに注文する仕組みを考えた。ここでは、過去の価格トレンドによって注文可能値幅内のどこに注文を出し易くするかについて、注文確率を調整することで群れ行動を表現する。まず注文可能値幅を、直近約定値段 $+6 \sim$ 直近約定値段 $+15$ (値幅 1)、直近約定値段 $-5 \sim$ 直近約定値段 $+5$ (値幅 2) 及び直近約定値段 $-15 \sim$ 直近約定値段 -6 (値幅 3) の 3 つの値幅に分ける。そして過去の価格トレンドに応じて各値幅の注文確率を変更する。過去の価格トレンドが上昇トレンドにある場合及び下落トレンドにある場合の 2 つの場合を考える。ここで「上昇トレンドにある」とは、過去 10 回の価格変動において合計 9 回以上上昇していることとする。また「下落トレンドにある」とは、過去 10 回の価格変動において合計 9 回以上下落していることとする。各上昇幅及び下落幅は考慮せず、単に上昇または下落を ± 1 でカウントしている。この 2 つの場合において各値幅に対する注文確率は表 1 の通りである。この注文確率の偏りにより、状況に応じて特定の値幅に注文が群れる様子が表現される。なお、上昇

表 1: 群れ発生時における注文確率。

	値幅 1	値幅 2	値幅 3
上昇トレンド	0.8	0.1	0.1
下落トレンド	0.1	0.1	0.8

トレンドでも下落トレンドでもない場合は、基礎となる確率的板モデルと同様に注文可能値幅全体に対してランダムに注文を行うものとする。

3.2 シミュレーション結果

群れ行動を持つ確率的板モデルのシミュレーション結果を分析する。基礎となる確率的板モデルと同様に 100 万回のシミュレーションを 10 回行った際の約定データ (ティックデータ) を用いる。シミュレーション回数に対して約定割合は $29.03 \pm 0.07\%$ であった。

まず、図 5 がティックデータのサンプルパスである。ここでは 3 万ティックを取り出してグラフにしている。次に時間スケールと価格差の標準偏差の関係を図 6 のとおり示した。点線はハースト指数 0.5 を表している。さらに、価格変動の大きさについて分析する。基礎となる確率的板モデルと同様にドローサイズの累積度数分布を図 7 に示した。また、併せて価格差データをシャッフルして時系列相関を取り除いたデータから取り出したドローサイズの累積度数分布についても示した。鎖線はこの累積度数分布を片対数グラフに対して線形近似した直線である。この直線の傾きは -0.06 である。

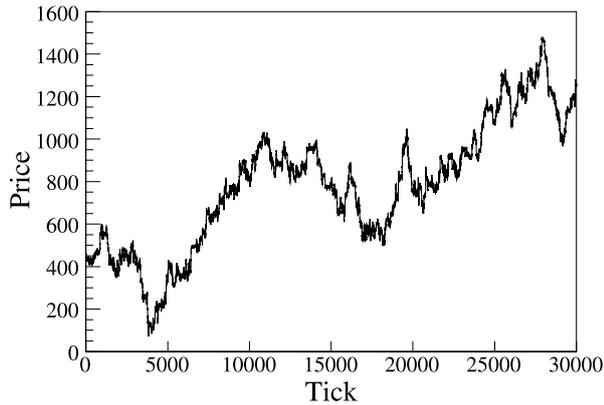


図 5: 群れ行動を持つ確率的板モデルから得られたサンプルパス。

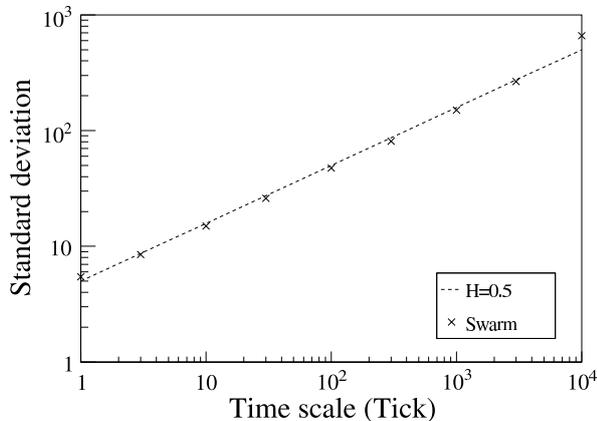


図 6: 群れ行動を持つ確率的板モデルの時間スケールと価格差の標準偏差の関係。

最後に裾部分の累積度数分布の形状を捉える。図 8 は得られたドローサイズの裾から 0.5% のデータを含むドローサイズ 42 以上の累積度数分布である。さらにこの裾部分の分布関数の推定を行った。実線は最尤法によりパラメータ推定を行い得られたべき分布の分布関数である。この図のべき指数は 4.52 である。

4 考察

まず基礎となる確率的板モデルのシミュレーション結果から考察を行う。シミュレーションから得られたサンプルパスを描いた図 2 を見ると極端なトレンドはなく、一般にイメージする価格変動が再現されていると思われる。また、図 3 から時間スケールと価格差の標準偏差の関係がおおよそハースト指数 0.5 のグラフに比例していることがわかる。これは価格の拡散スピードがランダムウォークに近いことを示している。さら

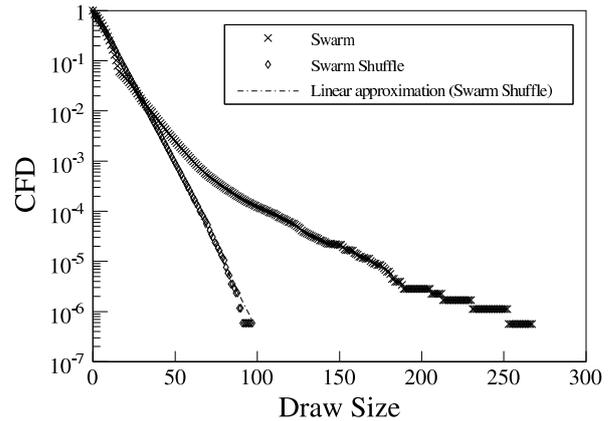


図 7: 群れ行動を持つ確率的板モデルから得られたドローサイズの累積度数分布。

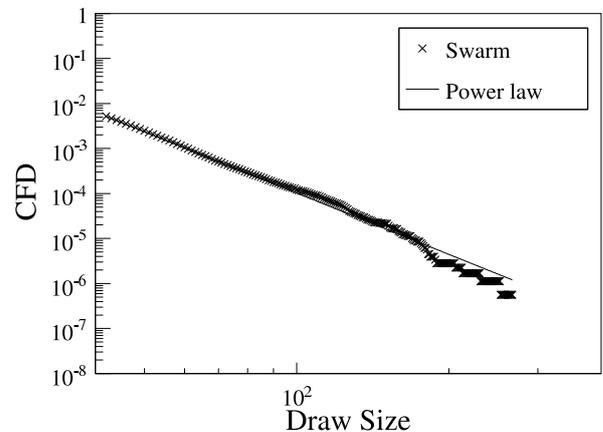


図 8: 群れ行動を持つ確率的板モデルから得られたドローサイズ 42 以上の累積度数分布。

に図 4 を見るとドローサイズが 16 のところから累積度数分布の形状が変化していることがわかる。これは注文可能値幅を決めたことにより一回の約定で動くことができる値幅に影響しているものと考えられる。さらにドローサイズが 16 以上の累積度数分布は指数近似される。これはドローサイズが大きくなるにつれて一定の確率で発生頻度が減衰していることによると考えられる。なお、同様に価格差をシャッフルして得られたドローサイズの累積度数分布を見ると同様に指数近似できることがわかる。これらのことにより、このモデルから得られた価格変動の時系列相関は限定的であるとされる。以上のことから、基礎となる確率的板モデルによって目的に沿った価格変動を捉えることができた。

次に、群れ行動を持つ確率的板モデルのシミュレーション結果から考察を行う。まず図 5 の尺度でサンプルパスを見る限り基礎となる確率的板モデルから得ら

れた価格変動と大きな違いは見られない。また図6を見ると図3と同様におおよそハースト指数0.5に比例していることがわかる。一方で、図7を見るとドロサイズの累積度数分布の裾が厚くなっていることがわかる。また、価格差をシャッフルして得られたドロサイズの累積度数分布と比較すると明らかに裾部分が乖離している。特に図8を見ると裾部分がべき分布で近似できることがわかった。

最後に、基礎となる確率的板モデルと群れ行動を持つ確率的板モデルそれぞれから得られたドロサイズの累積度数分布を比較した。図9を見るとドロサイ

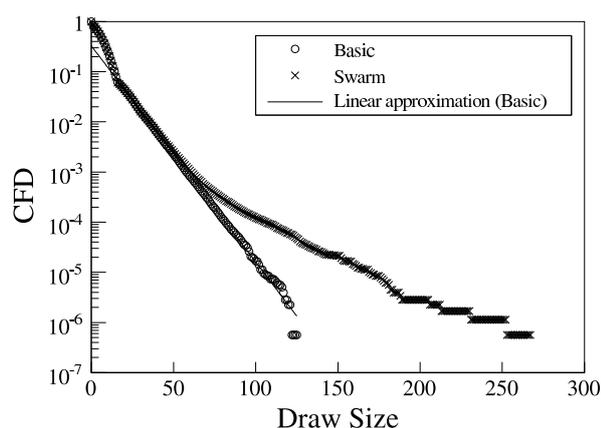


図9: 基礎となる確率的板モデル及び群れを持つ確率的板モデルそれぞれから得られたドロサイズの累積度数分布の比較。

ズが大きくなるほど乖離していくことがわかる。群れ行動を持つ確率的板モデルの方が明らかに分布の裾が厚い。これは群れ行動を組み込んだことによる効果だと考えられる。

5 結論

まず基礎となる確率的板モデルを導入したが、シミュレーション結果から目的に沿った価格変動の時系列相関が限定的であるモデルを構成することができた。さらにこのモデルに過去の価格トレンドに追随するような群れ行動を組み込むことで、ドロサイズの分布がファットテールになることが観測できた。金融取引市場において過去の価格トレンドに追随して注文を行うような投資行動が見られるとき、突発的に大規模な価格変動が起こる可能性があることがシミュレーションの観点から示された。

参考文献

- [1] Mantegna, R. N., Stanely, H. E.: Scaling behavior in the dynamics of an economic index, *Nature*, 376, 46–49 (1995)
- [2] Hashimoto, Y., Ito, T., Ohnishi, T., Takayasu, M., Takayasu, H., Watanabe, T.: Random walk or run. Market microstructure analysis of foreign exchange rate movements based on conditional probability, *Quant. Finance*, 12, 893–905 (2012)
- [3] Maslov, S.: Simple model of a limit order-driven market, *Physica A*, 278, 571–578 (2000)
- [4] Ichiki, S., Nishinari, K.: Simple stochastic order-book model of swarm behavior in continuous double auction, *Physica A*, 420, 304–314 (2015)