

# 株式市場の流動性と投資家の効用の関係について： 注文間の相互作用を導入して

## On the relation between the stock market liquidity and the traders' utility: introducing an interaction among orders

南雲 将太<sup>1\*</sup> 一木 信吾<sup>2</sup> 島田 尚<sup>1,3</sup>  
Shota Nagumo<sup>1</sup> Shingo Ichiki<sup>2</sup> Takashi Shimada<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> 東京大学大学院工学系研究科

<sup>1</sup> Graduate School of Engineering, The University of Tokyo

<sup>2</sup> 東京大学先端科学技術研究センター

<sup>2</sup> Research Center for Advanced Science and Technology, The University of Tokyo

<sup>3</sup> 数理・情報教育研究センター

<sup>3</sup> Mathematics and Informatics Center, The University of Tokyo

**Abstract:** In stock markets, it is often argued that increased liquidity contributes to the public benefit of the market as a whole, but it is not self-evident. In this study, we analyze the impact of increasing market liquidity on traders' utility mathematically. We calculate an exact solution of an average expected utility for one trader by using a simple model in which we assume orders follow independent uniform distributions. However, even when we assume a more complicated model where orders interact with each other, we obtain the result consistent with the first simple model in the limit of infinite number of orders. Also, we define a balance price on the order book, and we analyze the behavior of the balance price.

## 1 はじめに

株式市場において流動性の向上は市場全体の利益に資すると主張されることが多い。しかしながら、流動性が向上することで投資家がより有利な価格で約定する機会が増える一方、競合となる注文が増えることで、流動性向上前であれば約定するはずであった注文が約定しなくなる、という可能性も生じる。従って、流動性が向上することに伴うメリットとデメリットについて、市場全体で見たときにどちらが大きいのかは自明ではなく、流動性向上が投資家に与える影響について一度立ち止まって検討することは重要である。

流動性の指標として、「tightness」（最良売り気配と最良買い気配の価格差がどれだけ狭いか）、「depth」（注文が板にどれだけ入っているか）及び「resiliency」（ある注文によって価格が動いたときに元の正常価格へどれだけ速く戻るか）という量がしばしば用いられる [1]。つまり、一般に、より多くの注文がより良い価格（安い売り価格及び高い買い価格）に入っているとき、市

場は流動的であると言える。本研究では単純に注文数（投資家数）によって流動性を定義付け、注文の多さが投資家の効用に資するかどうかを論じる。

オークション理論分野の先行研究 [2][3] において、市場の投資家数と投資家の効用の関係について解析されており、投資家数が増えるほど投資家の効用が増えることが論じられている。しかしながら、これらの研究は、一人の売り手に対し複数の買い手が存在するシングルオークションを対象としたものであり、我々の知る限り、実際の株式市場のように複数の売り手に対し複数の買い手が存在するダブルオークションを対象として、投資家数と投資家の効用の関係について分析した研究は存在しない。

ダブルオークションに関する簡易的な数理モデルとして、それ自体は投資家の効用について論じたものではないが、Maslov モデルが存在する [4]。Maslov モデルでは、板と呼ばれる、いわば未約定注文の約定待ちリストを再現しており、過去に板に入っていた注文が新たに板に入ってきた注文と約定することとしている。また、戦略を持たない投資家を想定しており、それらの注文価格は約定価格を中心とする一様分布で決定さ

\*連絡先：東京大学大学院工学系研究科システム創成学専攻  
〒113-8654 東京都文京区本郷 7-3-1  
E-mail: s-nagumo@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

れるとしている。

本研究では、Maslov モデルに倣い、戦略を持たない投資家と板を想定し、注文価格が確率的に決定されるような簡易モデルを構築する。また、投資家の効用を注文価格と約定価格の差額により定義したうえ、市場の流動性すなわち注文数と効用の関係について、数理的に論じることとする。

## 2 モデル

### 2.1 株式銘柄

一市場（板）に上場する一銘柄のみを想定する。

### 2.2 投資家

$n$  人の投資家がそれぞれ 1 単位の注文を出すと想定する。それぞれの注文は売りか買いかのいずれかであり（注文種別と呼ぶことにする。）、確率  $p$  で売りを、確率  $1 - p$  で買いがランダムに選択されるものとする。注文価格については、ある確率分布に従いランダムに決定されるものとする。

### 2.3 約定ルール

一般にダブルオークションでは、主にザラ場方式と板寄せ方式の 2 つが存在する。ザラ場方式では、売り注文と買い注文が价格的に折り合いがつくと即時で約定し、約定は連続的に実行される。一方、板寄せ方式では「注文受付時間帯」と呼ばれる時間が設けられ、その時間に板へ入ってきた注文は即時で約定することなく、板に蓄積される。そして、注文受付時間帯の最後、价格的に折り合いのつく売り注文と買い注文が一度に約定されることになる。Maslov モデルではザラ場方式を対象としていたが、本研究のモデルでは板寄せ方式を対象とする。

現実の市場の板寄せ方式において、上述の「价格的に折り合いがつく」条件というのは一般に以下のような状態を指し、それを本研究のモデルは忠実に再現している。すなわち、注文受付時間帯に入ってきた全注文のうち、一番安い売り注文と一番高い買い注文が最初の約定ペアとして決定される。その後、二番目に安い売り注文と二番目に高い買い注文が次の約定ペアとして決定され、同様に約定ペアが順次決定されていく。依然約定ペアとして決定されていない残りの注文の中で、一番安い売り注文の価格が一番高い買い注文の価格よりも高くなった場合には「价格的に折り合いがつかなかった」ということで、それ以降約定ペアが成立することはない。約定ペアとして決定されていない残り

Ask	Price	Bid
	High ↑	
	$x_A$	Order A
	$x_B$	Order B
Order C	$x_C$	
Order D	$x_D$	
Order E	$x_E$	
	$x_F$	Order F
	↓ Low	

図 1: この板では、最初に注文 E と A が約定ペアとして決定され、次に注文 D と B が約定ペアとして決定される。注文 C と F は約定されない。約定価格を  $X$  とすると、注文 A から F の効用はそれぞれ  $x_A - X$ ,  $x_B - X$ ,  $0$ ,  $X - x_D$ ,  $X - x_E$ ,  $0$ 。

の注文の中で一番安い売り注文の価格を最良売り気配、一番高い買い注文の価格を最良買い気配と呼ぶことにする。

約定ルールについて図 1 の例を用いて説明する。 $n = 6$  個の注文 A, B, ..., F を想定し、それぞれの価格を  $x_A, x_B, \dots, x_F$  ( $x_A > x_B > \dots > x_F$ ) とする。また、注文 C, D 及び E は売りであり、注文 A, B 及び F は買いであるとする。このとき、一番安い売り注文 E と一番高い買い注文 A が最初の約定ペアとして決定され、次に、二番目に安い売り注文 D と二番目に高い買い注文 B が最初の約定ペアとして決定される。約定ペアとして決定されず残った注文である C と F については、 $x_C > x_F$  であるため約定されない。

### 2.4 効用

売り手の効用を「約定価格-その投資家が持つ銘柄の評価価格」、買い手の効用を「その投資家が持つ銘柄の評価価格-約定価格」によって定義する。約定しなかった投資家の効用は 0 であるとする。この定義はオークション理論の先行研究 [2][3] においても用いられている。また、各投資家はそれらが持つ評価価格に忠実に注文を入れるとし、従って評価価格と注文価格が等しいものとする。図 1 の例に戻ると、仮に約定価格を  $X$  とした際、注文 A から F の効用はそれぞれ  $x_A - X$ ,  $x_B - X$ ,  $0$ ,  $X - x_D$ ,  $X - x_E$ ,  $0$  となる。市場全体の効用の合計は  $x_A + x_B - x_D - x_E$  であり、これは約定

価格  $X$  に依存しない。一般に、このモデルでは市場全体の効用の合計は約定価格の定義に依存しない。また、一つの約定ペアにおける効用の合計は、注文価格の差額「買い価格-売り価格」で表されることになる。

### 3 分析

3.1 において、各注文価格は  $-\frac{1}{2}$  から  $\frac{1}{2}$  までの独立な一様分布に従ってランダムに決定されるものとする。この場合、効用の期待値は、注文価格と注文種別を積分することで計算可能である。次に 3.2 において、注文間に相互作用を導入する。すなわち、板寄せ方式の注文受付時間帯において、注文が順に入ってくるものとし、注文価格は、それ以前に板へ入ってきた全注文の状況によって決定される「均衡価格」を中心とした一様分布に従ってランダムに決定されるものとする。

#### 3.1 注文間に相互作用がない場合の解析解

$n$  個の注文を考える ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。各注文価格  $x_i$  は独立な一様分布に従うとし、各注文種別  $s_i$  はベルヌーイ分布に従うとする。 $s_i = 1$  が売り注文を、 $s_i = -1$  が買い注文を表し、それぞれの確率は  $p$  と  $1-p$  である。また、 $x_i$  と  $s_i$  は独立である。 $p = \frac{1}{2}$  の場合は既に [5] で分析されているので、本節では一般の  $p$  について考える。

$\{x_1, \dots, x_n; s_1, \dots, s_n\}$  の状況において、投資家の効用を  $U(\{x_i; \{s_i\})$  と定義する。また、 $\tilde{P}(\{s_i\})$  により  $s_i$  の確率分布を与える。このとき  $U(\{x_i; \{s_i\})$  の期待値  $\langle U \rangle$  は以下のとおり計算される。

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_2 \dots \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_n \\ &\quad \sum_{\{s_i\}=\pm 1} \tilde{P}(\{s_i\}) U(\{x_i; \{s_i\}) \\ &= n! \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_1 \int_{-\frac{1}{2}}^{x_1} dx_2 \dots \int_{-\frac{1}{2}}^{x_{n-1}} dx_n \\ &\quad \sum_{\{s_i\}=\pm 1} \tilde{P}(\{s_i\}) U(\{x_i; \{s_i\}) \\ &= n! \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx_1 \int_{-\frac{1}{2}}^{x_1} dx_2 \dots \int_{-\frac{1}{2}}^{x_{n-1}} dx_n \\ &\quad \sum_{\{s_i\}=\pm 1} \tilde{P}(\{s_i\}) \sum_{i < j} U_{i,j}(\{x_i; \{s_i\}). \quad (1) \end{aligned}$$

ここで一つ目の式変形以降、 $x_1 > x_2 > \dots > x_n$  を仮定し、注文  $i$  と  $j$  の間の約定ペアにおける効用を  $U_{i,j}(\{x_i; \{s_i\})$  と定義している。注文  $i$  と  $j$  が約定する条件は以下のとおりである。

1. 注文  $i$  は買いである。
2. 注文  $j$  は売りである。
3. 注文  $i$  よりも高い買い注文の個数と注文  $j$  よりも安い売り注文の個数は等しい。

注文  $i+1, \dots, j-1$  の注文種別は任意である。また、注文  $i$  と  $j$  の約定が実現した場合のペアの効用は  $x_i - x_j$  であり、従って、式 (1) の  $\sum_{\{s_i\}=\pm 1} \tilde{P}(\{s_i\}) U_{i,j}(\{x_i; \{s_i\})$  は、以下のとおり表される。

$$p(1-p) \sum_{k=0}^{\min\{i-1, n-j\}} [(1-p)^k p^{i-1-k} p^k (1-p)^{n-j-k} \cdot {}_{i-1}C_k \cdot {}_{n-j}C_k] \cdot (x_i - x_j). \quad (2)$$

式 (1) と式 (2) を計算すると、一投資家当たりの期待効用の平均値  $\langle u \rangle = \frac{\langle U \rangle}{n}$  は、

$$\langle u \rangle = \frac{p(1-p)}{2} \left( 1 - \frac{2}{n+1} \right) \quad (3)$$

と求まる。従って、期待効用の平均値は  $n$  の増加関数であるが、 $n$  の無限大の極限で  $\frac{p(1-p)}{2}$  に収束することが示された。

#### 3.2 注文間に相互作用を入れた場合のシミュレーション

3.1 では、注文価格の確率分布は固定であったが、この節では、注文分布の確率分布は、それ以前の注文によって決定されるものとする。決定ルールは以下のとおりである。

まず、注文受付時間帯において離散的な時間  $t = 1, 2, \dots, n$  を定義し、毎時点  $t$  で注文  $i = t$  が板に入るとする。時刻  $t = n$  で注文  $n$  が入り、注文受付時間帯が終ると、全ペアの約定が執行される。また、毎時点  $t$  において、仮にその時点で注文受付時間帯が終ったと想定し、約定ペア以外の注文内の最良売り気配と最良買い気配の平均を計算する。その平均値を均衡価格  $X_t$  として定義する。図 1 の状況では、仮にこの時点で注文受付時間帯が終ったとすると、約定ペア以外の注文は注文 C と F であり、従って均衡価格は  $\frac{x_C + x_F}{2}$  となる。もし注文受付時間帯の最初の方の時点において均衡価格を定められない場合には、 $X_t = 0$  とする。

板寄せ方式において注文受付時間帯が終るまでは約定が執行されることはないが、均衡価格  $X_t$  は仮に約定が執行された場合の板の中心の価格という意味で、各時点の疑似的な約定価格であると捉えることができる。実際の市場においても投資家は均衡価格を観察可能で

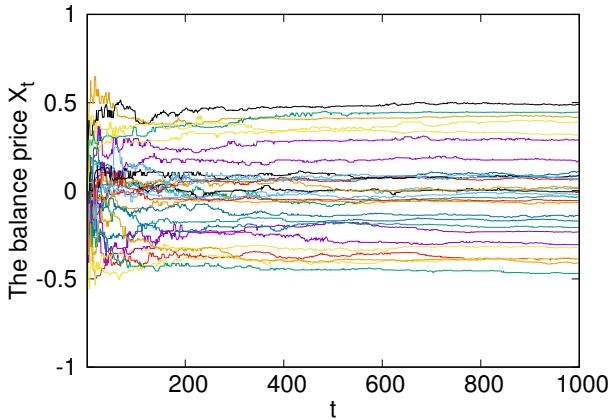


図 2: 均衡価格  $X_t$  の時系列変化. ここでは 1 万回の試行回数のうち 30 経路のみ図示した.

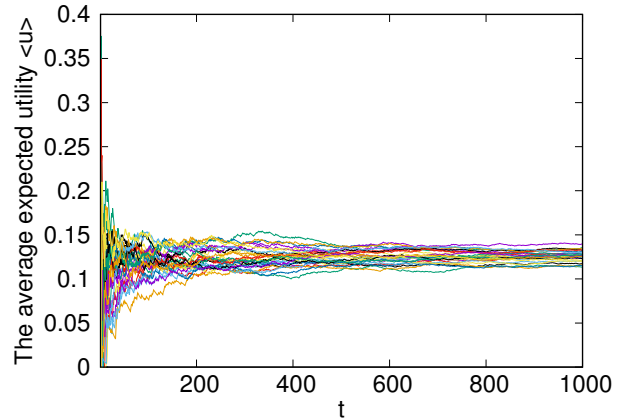


図 4: 一投資家当たりの効用の平均値  $u$  の時系列変化. ここでは 1 万回の試行回数のうち 30 経路のみ図示した.

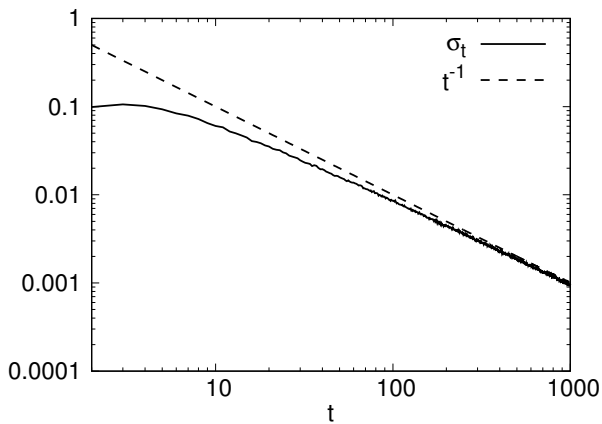


図 3: ボラティリティ  $\sigma_t$  の時系列変化.  $t$  の無限大の極限でボラティリティ  $\sigma_t$  が  $t^{-1}$  に比例している.

あり, この価格を参照しながら注文価格を決定していると思われる. 本モデルにおいては, 時点  $t+1$  での注文価格  $x_{t+1}$  は均衡価格  $X_t$  を中心とする一様分布によって決定されるものと想定する. また, 本節では, 簡単のため注文種別選択の確率は  $p = \frac{1}{2}$  とする.

本研究では試行回数を 1 万回としてシミュレーションを実行した. まず, 均衡価格  $X_t$  の時系列変化は図 2 のとおりである. また, 一般に価格変動の標準偏差をボラティリティと呼ぶが, ボラティリティを  $\sigma_t = \sqrt{\langle (X_{t+1} - X_t)^2 \rangle_\eta}$  で定義する.  $\langle \cdot \rangle_\eta$  は全経路の平均を表すとする. 図 3 はボラティリティ  $\sigma_t$  の時系列変化を示す.  $t$  の無限大の極限でボラティリティ  $\sigma_t$  が  $t^{-1}$  に比例することがわかる. この性質は, Appendix で説明を試みることにする.

最後に, 一投資家当たりの効用の平均値  $u$  のシミュレーション結果は, 図 4 のとおりである. 時点  $t = 1000$

で  $\langle u \rangle_\eta = 0.124 \pm 0.005$  となった. これは,  $n$  の無限大の極限で  $\langle u \rangle$  が  $\frac{1}{8}$  に収束するという 3.1 の結果と整合的である. このことは, 上の議論のとおり均衡価格の動きが  $\sim t^{-1}$  のスピードで減少し, 従って均衡価格を中心とする注文価格の確率分布の動きが次第に減少した結果, 注文価格の確率分布が固定された 3.1 の状況に帰着されるためと解釈される.

## 4 結論

本研究では板と効用に関するモデルを導入し, 本モデルを用いて注文価格が一様分布に従う場合の効用の厳密解を求めた. その結果, 注文が増えれば増えるほど, 一投資家当たりの期待効用の平均値は増加するが, ある一定の値に収束することが明らかになった. 次に本モデルを拡張し, 注文価格が過去の注文状況に依存すると想定したが, この場合も最初のモデルと整合的な結果が得られた. このことは, 板寄せ方式の性質によって比較的簡単に説明される. すなわち, 板寄せ方式では, 逐次的に約定が成立せず注文が蓄積されていくことで, 次第に注文分布の形状が変化しにくくなっていく. このことから, 注文価格が過去の注文に依存するモデルが, 結局のところ, 注文の確率分布が固定されていた最初のモデルで考えた状況に帰着したものと思われる.

ザラ場方式は, 約定が逐次的に実行されるため, 注文が蓄積されるとは限らないという点で, 分析は容易ではない. ザラ場方式に関する更なる研究が必要である.

今後の研究に関するもう一つの方針は, 実証分析である. 実際の株式市場では価格変動は正規分布ではなくべき乗則に従うことが広く知られている [6]. しかしながら, 本研究では Appendix のとおり注文受付時間

帯終了時点における均衡価格の分布は正規分布となった。注文受付時間帯における価格変動の特性について、更なる実証分析が望まれる。

## Appendix

### 均衡価格の変化

図5を用いながら、毎時点の均衡価格の変化が、以下のベルヌーイ分布に従うことを示す。まず、時点  $t$  において、売り注文の数密度を  $a_t(x)$ 、買い注文の数密度を  $b_t(x)$  とする。このとき、均衡価格  $X_t$  は、その定義から、影を付けた領域の面積が等しい点で求まる。次の時点  $t+1$  で、注文価格  $x_{t+1}$  が  $X_t$  の周りの一様分布によって決定され、この例では注文種別は買いであるとする。従って、売り注文の数密度は依然として  $a_{t+1}(x) = a_t(x)$  であるが、買い注文の数密度は  $b_{t+1}(x) = b_t(x) + \delta(x - x_{t+1})$  に変化する。このときに均衡価格  $X_{t+1}$  は、新たに影を付けた領域の面積が等しい点に更新され、 $X_t$  と  $X_{t+1}$  は以下の関係式を満たす。

$$a_t(X_t)(X_{t+1} - X_t) = -b_t(X_t)(X_{t+1} - X_t) + 1. \quad (4)$$

時点  $t$  で注文数は  $t$  個であるので、 $\int_{-\infty}^{\infty} a_t(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} b_t(x)dx = t$  が成り立つことから、 $a_t(x)$  と  $b_t(x)$  の典型的な幅を  $L_t$  とすると、 $a_t(X_t) + b_t(X_t) \sim \frac{t}{L_t}$  と近似できる。従って、 $X_{t+1} - X_t \sim \frac{L_t}{t}$ 。時点  $t+1$  の注文種別が売りである場合も同様の議論により、 $X_{t+1} - X_t \sim -\frac{L_t}{t}$  であることから、均衡価格の変化はベルヌーイ分布に従うといえる。均衡価格のボラティリティ  $\sigma_t$  は、

$$\sigma_t \sim \frac{L_t}{t} \quad (5)$$

である。この典型的な幅  $L_t$  は、Appendix の最後に評価する。

### 均衡価格の分布

時点  $t = 1000$  における均衡価格  $X_t$  の分布は図6で示される。 $X_{1000}$  の分布の標準偏差を  $\tilde{\sigma}_{1000} = 0.319$  とし、平均値 0、標準偏差  $\tilde{\sigma}_{1000}$  の正規分布も併せてプロットしているが、均衡価格  $X_t$  の分布はかなりの精度で正規分布によりフィットされることが分かる。このことは、以下のとおり説明が可能である。すなわち、上の議論により、時点  $t$  における均衡価格の変化はベルヌーイ分布に従うが、それを平均値 0 と標準偏差  $\sigma_t$  の正規分布で置き換えることを考える。毎時点の試行は独立なので、正規分布の畳み込みを考えることで、時点  $t = 1$  から  $t = n$  に渡る均衡価格の変化の分布は平

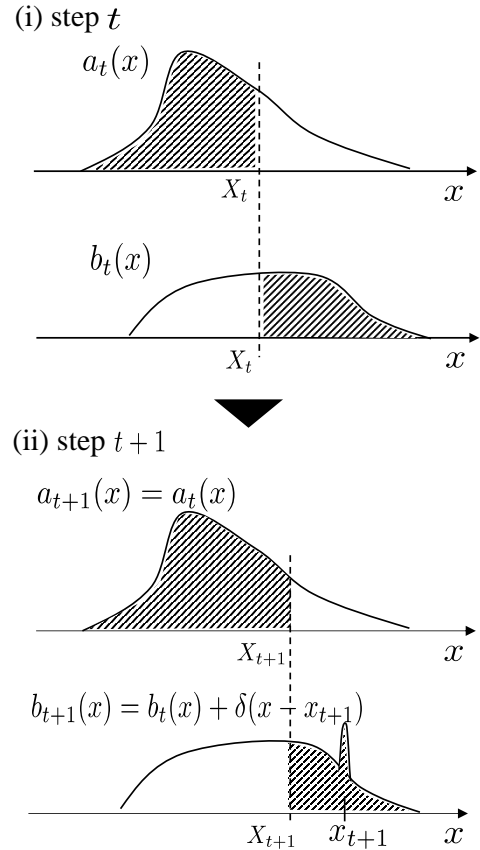


図5: 均衡価格の変化がベルヌーイ分布に従う理由. (i) 売り注文の数密度を  $a_t(x)$ 、買い注文の数密度を  $b_t(x)$  とする。均衡価格  $X_t$  は、影を付けた領域の面積が等しい点である。(ii) 新たに価格  $x_{t+1}$  へ買い注文が入り、売り注文の数密度は  $a_{t+1}(x) = a_t(x)$ 、買い注文の数密度は  $b_{t+1}(x) = b_t(x) + \delta(x - x_{t+1})$  となる。均衡価格  $X_{t+1}$  は更新され、 $X_{t+1}$  と  $X_t$  の変化が  $\sim \frac{L_t}{t}$  と評価される。

均值 0、標準偏差  $\tilde{\sigma}_n := \sqrt{\sum_{t=1}^n \sigma_t^2}$  の正規分布に従うことになる。

### 均衡価格のボラティリティの変化

式(5)における時点  $t$  での板の典型的な幅  $L_t$  を評価する。

均衡価格の経路の一つを  $\eta$  とし、その経路内で時点  $t$  において実現される売り板の注文数の密度関数を  $a_t^\eta(x)$  とする。以下の議論は売り買い逆でも成立する。時点  $t$  までの注文数  $t$  のうち半数が売り注文であることを考慮すると、経路  $\eta$  での均衡価格  $X_t^\eta$  を用いることで、

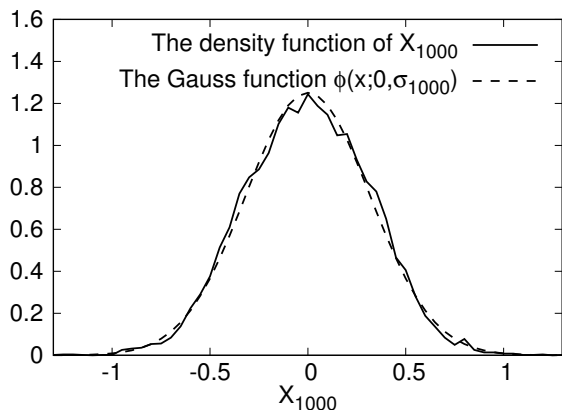


図 6: 均衡価格  $X_{1000}$  の分布と、その標準偏差  $\tilde{\sigma}_{1000}$ 、平均値 0 の正規分布。

$a_t^\eta(x)$  は以下のとおりに表現される。

$$a_t^\eta(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \delta(x - X_k^\eta). \quad (6)$$

本来、毎時点  $k$  において  $X_k^\eta$  の周りで一様分布に従って注文が入るが、簡単のため、ちょうど  $x = X_k^\eta$  に注文が入るとしている。

$a_t^\eta(x)$  の経路平均  $\langle a_t^\eta(x) \rangle_\eta$  は、

$$\begin{aligned} \langle a_t^\eta(x) \rangle_\eta &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \langle \delta(x - X_k^\eta) \rangle_\eta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_k^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\tilde{\sigma}_k^2}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

板の典型的な幅  $L_t$  を  $\langle a_t^\eta(x) \rangle_\eta$  の標準偏差で評価することになると、

$$\begin{aligned} L_t &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \langle a_t^\eta(x) \rangle_\eta / \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^t \tilde{\sigma}_k^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \sigma_i^2} \end{aligned} \quad (8)$$

式 (5) 及び式 (8) より、 $t$  の無限大の極限で、

$$\sigma_{t+1} \sim \frac{1}{t+1} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2}. \quad (9)$$

以上より、均衡価格のボラティリティについて  $\sigma_t \sim t^{-1}$  を示すことができた。

## 謝辞

本研究は、JSPS 科研費 (JP18K03449) の助成を受けました。

## 参考文献

- [1] A. S. Kyle: Continuous Auctions and Insider Trading, *Econometrica*, Vol. 53, pp. 1315–1336 (1985)
- [2] W. Vickrey: Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders, *Journal of Finance*, Vol. 16, pp. 8–37 (1961)
- [3] J. Bulow, P. Klemperer: Auctions Versus Negotiations, *American Economic Review*, Vol. 86, pp. 180–194 (1996)
- [4] S. Maslov, M. Mills: Price fluctuations from the order book perspective - empirical facts and a simple model, *Pysica A*, Vol. 299, pp. 234–246 (2001)
- [5] 南雲将太, 一木信吾: 証券流通市場の流動性向上が投資家の効用に与える影響, *JPX ワーキング・ペーパー*, Vol. 24 (2018)
- [6] R. N. Mantegna, H. E. Stanley: Scaling Behavior in the Dynamics of an Economic Index, *Nature*, Vol. 376, pp. 46–49 (1995)