

状態空間モデルを用いたバランス型投資信託のリバランス推定

Rebalance Estimation of Multi-Asset Mutual Fund using State Space Model

今井 崇公^{1*}
Takahiro Imai¹

¹ 野村アセットマネジメント株式会社
¹ Nomura Asset Management Co.,Ltd.

Abstract: ベンチマークのないバランス型運用では、しばしば自身と類似した運用を行うプレイヤーとのパフォーマンス比較が重視されるため、他のプレイヤーのポジションを把握することが相対的な運用リスク管理の観点から有用である。しかし多くのヘッジファンド複製に関する先行研究で示されるように、運用の自由度の高いポートフォリオのポジションを高精度に推定することは容易ではない。そこで本研究ではヘッジファンドより投資制約の強いバランス型投資信託をケーススタディとして、高精度なウェイト推定を実現する手法を提案し、人工データ実験によりその有効性を示す。具体的には、一般的なショート・レバレッジ制約付きの投資信託のウェイト変動が時価変動要因とリバランス要因から構成されることを、状態空間モデルを用いて明示的に組み込むことにより、ウェイトひいてはリバランスまで高精度に推定できることを明らかにする。

1 はじめに

バランス型運用の客観的なパフォーマンス評価は、多くの場合にベンチマークが与えられていないことから容易ではない。絶対リターンやシャープレシオなどを用いて絶対的な評価をすることも可能ではあるが、データ期間の相場つきの影響を強く受けることから複数の期間のパフォーマンスを中立的に評価できていないとは言い難い。この問題は、ウェイト制約などによりベータの影響を受けやすい運用ほど顕著になる。こうした状況から、バランス型運用ではしばしば自身と類似した運用を行う他のプレイヤーとのパフォーマンス比較が重視される。しかしベンチマーク対比でのパフォーマンス尺度の場合と異なり、比較対象である競合の運用商品のポジションを即時的に知ることができないことから、競合比を前提とした運用のリスク管理は行えず、事後的なパフォーマンス評価に終始してしまうという問題が存在する。

そこで本研究では、バランス型運用の相対的なリスク管理を企図して、他のプレイヤーのポジションを高精度に推定する手法を提案する。ここで相対的なリスク管理とは、一般的な株式運用におけるトラッキングエラーやアクティブシェアの管理に相当する概念である。

しかし、多くのヘッジファンド複製に関する先行研究で示されるように、ヘッジファンドのような運用の自由度が高く、透明性の低い運用商品のポジションを高精度に推定することは容易ではない。そこで本研究では、ヘッジファンドより投資制約が強く透明性の高いバランス型投資信託をケーススタディとして、高精度なウェイト推定の実現を目指す。本ケースでは、ショート・レバレッジ制約¹付きの投資信託を想定しており、デリバティブが用いられないことからウェイト変動は時価変動要因とリバランス要因に明確に分離される。この性質を状態空間モデルを用いて明示的に組み込むことにより、高い精度のウェイト推定ひいてはリバランス推定を実現する手法を提案する。

本稿の構成は次の通りである。2章では、本研究に関連するヘッジファンド複製に関する先行研究について簡単に述べる。3章では、線形回帰、ベイズ線形回帰、カルマンフィルタ、粒子フィルタを用いたウェイトの推定手法を導入する。そして4章において、バランス型投資信託を想定した人工データを用いた数値実験によってそれらの有効性を評価する。最後に、結論を述べる。

*連絡先：野村アセットマネジメント株式会社
〒135-0061 東京都江東区豊洲二丁目2番1号
E-mail: takahiro.imai.biz@gmail.com

本稿の内容は全て筆者に属し、所属する組織としての見解を示すものではない。また本稿にあり得べき誤りは、全て筆者の責に帰する。

¹ウェイトが非負で、ウェイト和が1となるような投資制約で、最適化の分野では単体制約と呼ばれる。投資信託では、このようなウェイト制約が課されることが多い。

表 1: 一般のヘッジファンドと本研究の対象の比較

	一般のヘッジファンド	本研究の対象
投資対象の可変性	有	無
投資対象の非線形性 (オプションなど)	有	無
レバレッジ	有	無
ショート	有	無
リターンの開示頻度	四半期, 月次	日次

2 先行研究

ポートフォリオのウェイト推定問題の関連研究として、ヘッジファンド複製に関する研究が古くから数多く行われている。ヘッジファンド複製の主なモチベーションは、ヘッジファンドのパフォーマンスを低コストで複製することであり、大きく3つのアプローチに分かれる [1]。第一のアプローチは、ヘッジファンドの公表データ、金融指標データなどから、ファクターモデルなどを用いてヘッジファンドのリターンを複製する手法であり、帰納的に毎期のリターンを複製する。第二のアプローチは、対象とするヘッジファンドが行っていると想定される運用戦略をボトムアップに構築することでリターンを複製する手法であり、演繹的に毎期のリターンを複製する。第三のアプローチは、ヘッジファンドのリターンの統計的性質を規定し、その特性を満たすような戦略を構築する手法であり、リターン分布を複製する。これらの中でポートフォリオのウェイト推定に直接的に関連するのは、第一のアプローチであり、多くの場合にファンドのエクスポージャー²推定が行われている。

リターンの帰納的な逐次複製は、回帰をベースに行われることが多い。古典的な手法として、OLS を用いた複製はリスクファクターでの複製 [2, 3, 4]、流動性資産での複製 [5] など数多く行われている。なお [6] では、S&P500 の個別銘柄に投資するファンドを対象に逐次的に保有銘柄候補を変えながら OLS を用いてウェイト推定をしているが、保有銘柄の組合せを当てることに焦点が当てられており、ウェイト推定を高精度にできているわけではない。この他にも、OLS を拡張した手法として、Ridge 回帰を用いて多重共線性の問題に対応する手法 [7]、LASSO 回帰を用いて大規模な投資ユニバースから複製に用いるべき資産を選択する手法 [8, 9]、それらを組み合わせた Elastic Net 回帰を用いた手法 [10] など、OLS に正則化項を付加した手法も提案されている。[10] によれば、ステップワイズ回帰、主成分回帰、部分最小二乗回帰などの古典的な手法と

比較して、正則化項をつけた縮小推定量の方が実証的に高いリターンの複製精度を得られている。

より精緻なモデリングを実現しようとした試みとして、状態空間モデルを導入した研究もある。状態空間モデルを用いたアプローチでは、エクスポージャーを状態とみなして状態方程式で記述し、リターンが観測方程式に従ってエクスポージャーから生成されると考える。状態空間モデルの推定は、ベイズフィルタを通してオンラインで行われるため、エクスポージャー推定の遅延性を改善できる。具体的な手法として、状態方程式と観測方程式が共に線形で、誤差を正規分布とした場合にはカルマンフィルタを用いたアプローチ [10, 11, 12]、より一般の分布の場合には粒子フィルタを用いたアプローチ [12, 13] が提案されている。粒子フィルタを用いることで、リターンのファットテール性やオプション等の非線形なリターンを有する資産などを考慮することも可能となる。その他に、ヘッジファンド指数をショート・レバレッジ制約付きのポートフォリオで複製しようとした試みもある [13]。この研究ではエクスポージャー分布をディリクレ分布とした状態空間モデルでモデリングしており、粒子フィルタを用いた推定により、相対的に優れたリターンの複製精度が得られている。しかし、投資対象が縛られないヘッジファンド指数と複製ポートフォリオの投資対象が一致しないこと、ヘッジファンド指数のリターンの開示頻度が低いことから、ウェイト推定ができているわけではない。

以上に挙げたヘッジファンド複製に関する研究のほとんどのモチベーションは、低コストでヘッジファンドと同一のパフォーマンスを得ることにあり、正確なウェイト推定を目的としているわけではない。この点がヘッジファンド複製に関する先行研究と本研究の大きな違いである。一般のヘッジファンドと本研究の対象には表 1 のような違いがあり、本研究の問題の構造のシンプルさと透明性をうまく活かすことで、精度の良いウェイト推定が可能となる。

²ファクター等に対するファンドの感応度を指し、ファンドの保有資産のウェイトを指しているわけではないことに注意されたい。

3 ウェイトの推定手法

ウェイト推定問題の基本構造は回帰問題として捉えられ、一種の逆問題になっている [14]。多くの順問題の演算が和、積、積分から構成されることから、逆問題はそれらの逆演算である差、商、微分から構成されることが多い。逆問題における商演算は不安定性を生む要因となり得て、線形回帰においては逆行列に起因する多重共線性の問題が存在する。

以上を背景に、ウェイト推定問題は一般に不良設定問題となるが、不良設定問題を良設定問題に変換するためにしばしば正則化が施される。正則化はモデルのバイアスを上げ、バランスを下げる効果があるが、問題の構造に合わせた正則化を施すことで汎化性能を向上させることも可能である。ここで幾つかの正則化はベイズ的に解釈可能³であることが知られている [15]。

本研究では自由度の高いベイズモデルを用いることで問題の構造に合わせた正則化を図る。具体的には線形回帰から始めて、ベイズモデルにおける事前分布（グラフィカルモデルおよび各ノードの分布形）をうまく設定することで、効率的なウェイト推定の実現を目指す。

3.1 線形回帰

T, K をそれぞれデータ期間、ファンドのキャッシュを除く投資対象資産数とする。ここでは、組み入れ資産のリターン行列 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{T \times K}$ 、ファンドのリターンベクトル $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^T$ を入力値としてウェイトベクトル $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^K$ を求める問題を考える。なおリターン誤差ベクトルを $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{r} - \mathbf{R}\mathbf{w}$ とする。

線形回帰を用いたウェイト推定問題は、ショート・レバレッジ制約下でリターンの二乗誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon}$ を最小化すればよく、以下の最小化問題に帰着する：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \mathbf{w} - \mathbf{r}^\top \mathbf{R} \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \mathbf{w}^\top \mathbf{1} \leq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

3.2 ベイズ線形回帰

ナイーブな線形回帰を用いたウェイト推定の問題点として、「正則化されていないため、即時性を高めようとしてデータの窓幅を短くすると外れ値の影響が大きくなること」、「ファンドの事前情報を全く利用していないため、推定の非効率性が残ること」が挙げられる。

そこで本節では線形回帰をベイズ化し、ファンドに関する事前情報を事前分布の形で与えることで問題の解決を図る。具体的には、ウェイトの事前分布として、

³例えば、 L^1 正則化はラプラス分布を、 L^2 正則化は $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \eta^2 \mathbf{I})$ を事前分布に置いた場合の最大事後確率 (MAP) 推定と解釈できる。

平均および共分散行列を前回推定したウェイト平均（前回の推定ウェイト）およびウェイト共分散行列とした正規分布を用いる。また尤度として、誤差が正規分布に従うと仮定する⁴。事前分布をこのように置くことで、「今回推定するウェイトは前回推定したウェイトの近傍にあること」、「ファンドのウェイト変動には特徴（例えば、外国株式比率が上がる時は国内債券比率が下がるなど）があること」を踏まえることができる。

ただし今回の問題設定には、ショート・レバレッジ制約が課されているため、事後分布の平均値が必ずしも実行可能領域内に存在するとは限らない。そこで事後分布の平均値が、実行可能領域外に出てしまった場合、実行可能領域内で最大事後確率をとる点⁵が平均値になるように事後分布を平行移動させる手順を加える。以上のベイズ更新の手順について、2 資産+キャッシュの場合を図 1 に示す。

以上より、正定値行列 $\mathbf{S}_0 \in \mathbb{R}^{K \times K}$ 、正実数 $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ を用いて、ウェイトの事前分布 $p(\mathbf{w}) = \mathcal{N}(\mathbf{w}_0, \mathbf{S}_0)$ 、リターン誤差 $\varepsilon_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \beta^{-1})$ を仮定すると、ベイズ線形回帰を用いたウェイト推定問題は、以下の最小化問題⁶に帰着する：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{S}^{-1} \mathbf{w} - (\mathbf{w}_0^\top \mathbf{S}_0^{-1} + \beta \mathbf{r}^\top \mathbf{R}) \mathbf{w} \\ \text{where} \quad & \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}_0^{-1} + \beta \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \mathbf{w}^\top \mathbf{1} \leq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

3.3 カルマンフィルタ

本研究対象のようにファンドが現物資産にのみ投資している場合には、ウェイトは時価変動要因とリバランス要因の 2 つの要因で変動する。したがって実際のウェイトは、前回更新ウェイトではなく、前回更新ウェイトから「時価変動した」ウェイトの近傍にある。この情報をウェイトを状態とみなした状態空間モデルを用いて組み込むことを本節と次節では考える。

ウェイトの時価変動とファンドリターンは共に、ウェイトと組み入れ資産のリターンの線形式で記述できる。仮にリバランスとファンドリターン誤差が正規分布に従うと仮定した場合、状態空間モデルは線形・正規分布型となり、カルマンフィルタを用いて状態を推定することができる。

⁴尤度が正規分布の場合、正規分布は共役事前分布となることから、事後分布も正規分布となる。

⁵実行可能領域内において、元の事後分布の平均値からのマハラノビス距離最小の点である。

⁶目的関数は $(\mathbf{r} - \mathbf{R}\mathbf{w})^\top (\mathbf{r} - \mathbf{R}\mathbf{w}) + \frac{1}{\beta} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^\top \mathbf{S}_0^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)$ のように二乗誤差+マハラノビス距離で記述された正則化項の形に変形できる。 $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{S}_0 = \mathbf{I}$ の場合には通常の L^2 正則化となることから、問題の構造を踏まえて L^2 正則化の拡張をしていると解釈できる。

- ①事前分布の設定 ②データを加えて事後分布算出 ③事後分布を実行可能領域へ平行移動
 …実行可能領域内で最大事後確率をとる点が平均値になるように移動

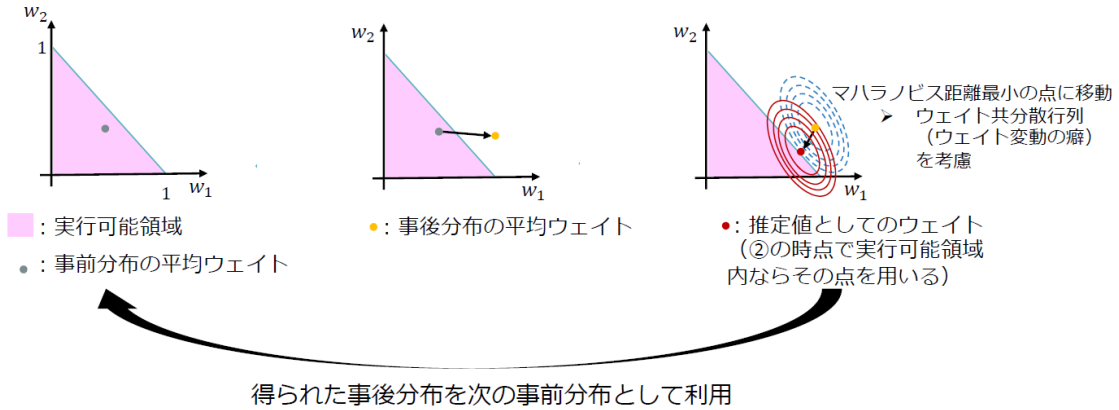


図 1: 2 資産 + キャッシュの場合のベイズ更新の手順

ここでは、推定した $t-1$ 時点の期初ウェイトベクトル $\mathbf{w}_{t-1} \in \mathbb{R}^K$ 、キャッシュウェイト $w_{t-1,cash} \in \mathbb{R}$ 、 $t-1$ 時点および t 時点の組み入れ資産リターンベクトル $\mathbf{r}_{a,t-1}, \mathbf{r}_{a,t} \in \mathbb{R}^K$ 、 t 時点のファンドリターン $r_t \in \mathbb{R}$ を入力値として、 t 時点の期初ウェイトベクトル $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^K$ を求める問題を考える。

この場合、状態方程式 (ウェイトの更新式) は

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{G}_t \mathbf{w}_{t-1} + \mathbf{e}_t \quad \mathbf{e}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{E}_t)$$

$$\mathbf{G}_t = \frac{\text{diag}(\mathbf{1} + \mathbf{r}_{a,t-1})}{\|\text{diag}(\mathbf{1} + \mathbf{r}_{a,t-1}) \mathbf{w}_{t-1}\|_1 + w_{t-1,cash}} \quad (3)$$

で表される⁷。ここで \mathbf{G}_t は時価変動を表し、 \mathbf{e}_t はリバランスを表す。通常、誤差項として取り扱われる \mathbf{e}_t に経済的意味付けをしている点が本モデルの要所である。これにより、ウェイトのみならずリバランスを含めた推定が可能となる。

また観測方程式 (ファンドリターンの更新式) は

$$r_t = \mathbf{F}_t \mathbf{w}_t + v_t \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, V_t)$$

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{r}_{a,t}^\top \quad (4)$$

で表される。ここで v_t はファンドリターン誤差を表す。なお本モデルにおいて、 \mathbf{E}_t と V_t は既知とする。

ショート・レバレッジ制約については、フィルタリング分布についてベイズ線形回帰の場合 (図 1) と同様の対応をする。

以上より、カルマンフィルタを用いたウェイト推定問題では、キャッシュを除く資産について初期ウェイト分布 $\mathcal{N}(\mathbf{w}_0, \mathbf{S}_0)$ を置いてフィルタリング分布の制約付き MAP 推定を行えばよく、以下の最小化問題に帰着する:

⁷ $\text{diag}(\mathbf{x})$ はベクトル \mathbf{x} の各要素を対角成分とする対角行列を返す。

$$\min_{\mathbf{w}_t} \frac{1}{2} \mathbf{w}_t^\top (\mathbf{A}_t^{-1} + \mathbf{F}_t^\top \mathbf{V}_t^{-1} \mathbf{F}_t) \mathbf{w}_t - (\mathbf{F}_t^\top \mathbf{V}_t^{-1} r_t + \mathbf{A}_t^{-1} \mathbf{a}_t)^\top \mathbf{w}_t$$

where $\mathbf{a}_t = \mathbf{G}_t \mathbf{w}_{t-1}$ (5)

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{E}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{S}_{t-1} \mathbf{G}_t^\top$$

$$\mathbf{S}_{t-1}^{-1} = \mathbf{A}_{t-1}^{-1} + \mathbf{F}_{t-1}^\top \mathbf{V}_{t-1}^{-1} \mathbf{F}_{t-1}$$

s.t. $\mathbf{w}_t \geq \mathbf{0}, \mathbf{w}_t^\top \mathbf{1} \leq 1.$

ここでリバランスは、 $\mathbf{w}_t - \mathbf{a}_t$ で求めることができる。

3.4 粒子フィルタ

前節までは、ショート・レバレッジ制約を最適化問題の制約条件に入れることで考慮していた。本節では、単体を定義域とするディリクレ分布でモデリングすることで、より自然にウェイト制約を考慮する。なおディリクレ分布を導入したことで解析的な推定が困難になったため、本節では数値計算的な推定手法である粒子フィルタを用いる。

この場合、状態方程式 (キャッシュを含むウェイトの更新式) は以下で表される:

$$\mathbf{w}_t \sim \text{Dirichlet}(\boldsymbol{\alpha}_t). \quad (6)$$

ここで $\boldsymbol{\alpha}_t \in \mathbb{R}^{K+1}$ はディリクレ分布のパラメータであり、分布の期待値が前回の推定ウェイトから時価変動した値となるように決定する。また観測方程式は、式 (4) と同様とする。

粒子フィルタを用いたウェイト推定アルゴリズムを、Algorithm 1 に示す。ここで $\alpha_{scale} \in \mathbb{R}_{>0}$ はディリクレ分布の分散に影響を与えるパラメータで、値が大きいかほど分散が小さくなる。また $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ は粒子数である。

Algorithm 1 粒子フィルタを用いたウェイト推定アルゴリズム

Input: α_{scale} , N

Output: W

```

1: for  $t = 1$  to  $T$  do
2:   if  $t = 1$  then
3:      $\alpha_t \leftarrow 1$ 
4:   else
5:      $w_{t|t-1}^{(tmp)} \leftarrow G_t w_{t-1|t-1}$ 
6:      $\alpha_t \leftarrow \alpha_{scale} w_{t|t-1}^{(tmp)}$ 
7:   end if
8:   for  $i = 1$  to  $N$  do
9:      $w_{t|t-1}^{(i)} \sim \text{Dirichlet}(\alpha_t)$ 
10:  end for
11:   $W_{t|t-1} = \{w_{t|t-1}^{(1)}, w_{t|t-1}^{(2)}, \dots, w_{t|t-1}^{(N)}\}$  を尤度比で復元抽出し,  $W_{t|t} = \{w_{t|t}^{(1)}, w_{t|t}^{(2)}, \dots, w_{t|t}^{(N)}\}$  を生成
12:   $w_{t|t} \leftarrow \mathbb{E}(W_{t|t})$ 
13: end for
14:  $W \leftarrow \{w_{1|1}, w_{2|2}, \dots, w_{T|T}\}$ 

```

り、値が大きいほど高い精度の推定が可能となる。ここでリバランスは、 $w_{t|t} - w_{t|t-1}^{(tmp)}$ で求めることができる。

4 数値実験

4.1 人工データ

ここでは、仮想的な株式、債券、キャッシュを保有するショート・レバレッジ制約付きのファンドのウェイト推定問題を考える。入力値は株式、債券、ファンドのリターンであり、株式、債券の1期間のリターンはそれぞれ $\mathcal{N}(0, 0.06^2)$, $\mathcal{N}(0, 0.03^2)$ に独立に従うとする。データ期間は300期間で、このファンドは50期毎に以下の戦略に切り替えるようリバランスすると仮定する。

- 通常戦略 (0, 50, 150, 250 期):
株式 40%, 債券 40%, キャッシュ 20%
- リスクオフ戦略 (100 期):
株式 10%, 債券 20%, キャッシュ 70%
- リスクオン戦略 (200 期):
株式 70%, 債券 20%, キャッシュ 10%

推定すべき真のウェイト推移を図2に、真の株式・債券のリバランス行動を図3⁸に示す。

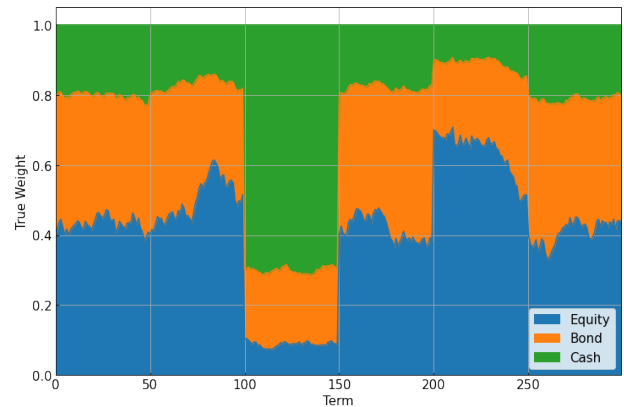


図 2: 真のウェイト推移

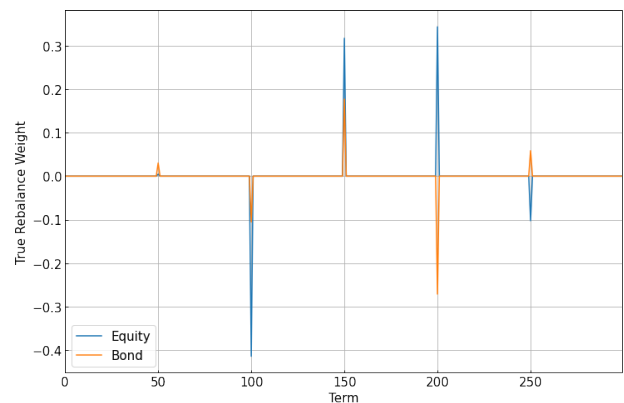


図 3: 真の株式・債券のリバランス行動

⁸煩雑になるため掲載していないが、ショート・レバレッジ制約下でのリバランス比率はネットで0であるため、キャッシュリバランス比率は -株式リバランス比率 - 債券リバランス比率 となる。

4.2 ハイパーパラメータ

線形回帰では、窓幅 20 のローリングウィンドウで推定を行った。ベイズ線形回帰では、初期ウェイト分布を $\mathbf{w}_0 = (0.5, 0.5)^\top$, $\mathbf{S}_0 = 10^{-2}\mathbf{I}$ とし、 $\beta = 10^2$ で 1 期間ずつデータを与えて更新した。カルマンフィルタでは、初期ウェイト分布を $\mathbf{w}_0 = (0.5, 0.5)^\top$, $\mathbf{S}_0 = 10^{-2}\mathbf{I}$, 誤差共分散を $\mathbf{E}_t = 10^{-2}\mathbf{I}$, $V_t = 10^{-6}$ とした。粒子フィルタでは、粒子数を 10 万、ディリクレ分布のパラメータを $\alpha_{scale} = 10^2$, 誤差分散を $V_t = 10^{-6}$ とした。

4.3 分析結果と考察

4 つの手法を用いて推定したウェイト推移を図 4 に示す。線形回帰を用いたウェイト推定では、100 期までの比較的緩やかなウェイト変動の期間では、水準を概ね当てられている。これは、窓幅内のウェイトが均一に近い局面では最良線形不偏推定量である線形回帰が機能することを示唆している⁹。一方で、100 期以降の戦略のスイッチングによる激しいウェイト変動には応答の遅行が目立つ。線形回帰は正則化していないバッチ学習であり、窓幅内の急激なウェイト変動を前提としていないモデルであることが原因と考えられる。ベイズ線形回帰を用いたウェイト推定では、オンライン学習していることから、通期にわたり遅効性が少ない。一方で L^2 正則化に相当する最適化を行っていることから、推定ウェイトがスムージングされてしまっており、不連続なウェイト変動を推定できていない。カルマンフィルタや粒子フィルタといった状態空間モデルを用いたウェイト推定では、高い精度で遅行なくウェイト推定ができていく。ウェイトの変動構造を基礎方程式として陽にモデルに入れたことが、推定精度を向上させたと考えられる。なお線形回帰以外の手法では、真のウェイトと異なる初期値を与えているが、短期間で正しい水準に収束しており、手法の頑健性も窺える。

50 期以降のウェイトとリバランスの推定精度を表 2 に、状態空間モデルを用いて推定した株式・債券のリバランス行動を図 5 に示す。表 2 において、コモナリティ平均とは、真のウェイトと推定ウェイトの共通部分の平均ウェイトを表し、値が大きいほど精度が高いことを示す。誤りバランス比率平均とは、真のリバランスと推定したリバランスのウェイト差の絶対和の平均を表し、値が小さいほど精度が高いことを示す。通期のコモナリティ平均は、状態空間モデルを用いた手法の精度が高く、いずれも 95% 以上の精度であった。リバランス後 5 期間に絞ったコモナリティ平均は、カルマンフィルタが最良の結果で、95% 以上の精度を保っている。図 5 によれば、カルマンフィルタは 50 期毎

⁹リバランス頻度が高くウェイトが一定に維持される場合は、線形回帰が最も有効であるのは自明である。

のリバランスの発生を明確に特定できており、表 2 の誤りバランス比率平均が低いことから、大きなリバランスを迅速かつ正確に捉えられていることが窺える。相対リスクである他のプレイヤーとのトラッキングエラーはリバランスに伴い変動するため、この結果の意義は大きい。一方で図 5 によると、粒子フィルタを用いた手法はスパースなリバランス推定にはなっていない。これはカルマンフィルタでは MAP 推定を行っているのに対し、粒子フィルタでは期待事後 (EAP) 推定を行っており、安定的だが大きな変化を伴わない解を出しやすいことが影響していると考えられる。

最後に、線形回帰、ベイズ線形回帰、カルマンフィルタを用いた手法はいずれも線形制約付き凸二次計画問題に帰着するため、大域的最適解が一意に存在すること、計算量が少ないというメリットがある。一方で、粒子フィルタを用いたアプローチは汎用性は高いが、サンプリングベースであるため、資産数が増加した際に十分な粒子数がなければ実用的に利用可能な解が得られないことに注意が必要である。

5 まとめ

本研究ではバランス型運用の相対的な運用リスク管理の導入を企図しながら、線形回帰、ベイズ線形回帰、カルマンフィルタ、粒子フィルタをベースとした 4 つの手法を用いて、一般的なバランス型投資信託を想定した人工データのウェイト推定を行った。結果として、状態空間モデルを用いてウェイトの時価変動構造を明示的に入れる提案手法により、高い精度のウェイト推定、ひいてはリバランス推定ができることが明らかとなった。特にカルマンフィルタを用いた推定ではリバランスを非常に高い精度で推定できており、解析的なアプローチであることから計算量の観点からも実的に価値が高いことが示唆された。

今後の課題として二点ほど触れておく。第一に粒子フィルタを用いた手法の改良である。単体制約を自然に反映させるために導入したディリクレ分布はパラメータ数が資産数しかなく、記述力が低いため十分な事前情報を入れられない。例えば共分散行列に相当する情報を組み入れられるようにモデルを拡張することで、より精緻なリバランス推定ができる可能性がある。粒子フィルタは分布形が限定されない汎用的な手法であることから、本研究で取り扱った以上のクラスの問題に拡張する際にも利便性が高く、手法の改良が望まれる。第二に実証分析への応用である。具体的には公募バランス型投資信託のウェイト・リバランス推定を行い、バランス型投資信託全体の投資行動の特性 (個々のリバランス特性、ファンド間の類似性、金融危機時の応答など) を考察することが挙げられる。



図 4: 4つの手法を用いて推定したウェイト推移

表 2: 50期以降のウェイトとリバランスの推定精度

	線形回帰	ベイズ線形回帰	カルマンフィルタ	粒子フィルタ
コモナリティ平均 (%)	90.3	92.1	99.5	97.5
リバランス後5期間のコモナリティ平均 (%)	70.6	76.8	95.2	85.9
誤りバランス比率平均 (%)	-	-	1.3	2.5

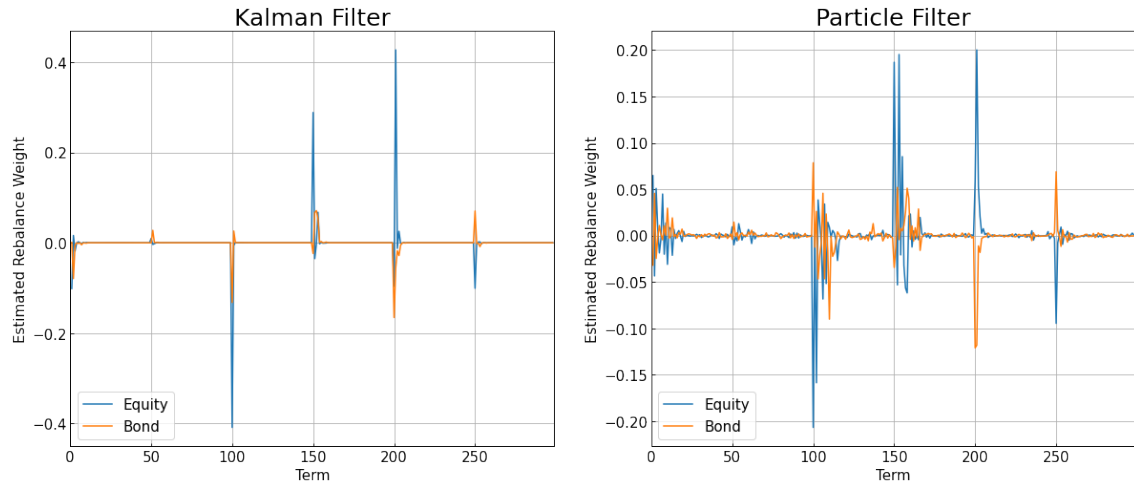


図 5: 状態空間モデルを用いて推定した株式・債券のリバランス行動

参考文献

- [1] Akihiko Takahashi, Kyo Yamamoto, et al. Hedge fund replication. *The Recent Trend of Hedge Fund Strategies*, pages 57–95, 2008.
- [2] William F Sharpe. Asset allocation: Management style and performance measurement. *Journal of portfolio Management*, 18(2):7–19, 1992.
- [3] William Fung and David A Hsieh. Hedge fund benchmarks: A risk-based approach. *Financial Analysts Journal*, 60(5):65–80, 2004.
- [4] Stein Frydenberg, Kjartan Hrafnkelsson, Vegard Strand Bromseth, and Sjur Westgaard. Hedge fund strategies and time-varying alphas and betas. *The Journal of Wealth Management*, 19(4):44–60, 2017.
- [5] Jasmina Hasanhodzic and Andrew W Lo. Can hedge-fund returns be replicated?: The linear case. *The Linear Case (August 16, 2006)*, 2006.
- [6] David Byrd, Sourabh Bajaj, and Tucker Hybnette Balch. Fund asset inference using machine learning methods: What’s in that portfolio? *The Journal of Financial Data Science*, 1(3):98–107, 2019.
- [7] Joseph Simonian and Chenwei Wu. Factors in time: Fine-tuning hedge fund replication. *The Journal of Portfolio Management*, 45(3):159–164, 2019.
- [8] Jun Duanmu, Yongjia Li, and Alexey Malakhov. In search of missing risk factors: Hedge fund return replication with etfs. *Available at SSRN 2411910*, 2018.
- [9] Lars Stentoft and Sha Wang. Consistent and efficient dynamic portfolio replication with many factors. *The Journal of Portfolio Management*, 46(2):79–91, 2019.
- [10] Jiaqi Chen and Michael L Tindall. Hedge fund replication using shrinkage methodologies. *The Journal of Alternative Investments*, 17(2):26–49, 2014.
- [11] Noël Amenc, Lionel Martellini, Jean-Christophe Meyfredi, and Volker Ziemann. Passive hedge fund replication—beyond the linear case. *European Financial Management*, 16(2):191–210, 2010.
- [12] Thierry Roncalli and Guillaume Weisang. Tracking problems, hedge fund replication and alternative beta. *Hedge Fund Replication and Alternative Beta (January 9, 2009)*, 2009.
- [13] Laszlo F Korsos. The dirichlet portfolio model: Uncovering the hidden composition of hedge fund investments. *arXiv preprint arXiv:1306.0938*, 2013.
- [14] Finbarr O’Sullivan. A statistical perspective on ill-posed inverse problems. *Statistical science*, pages 502–518, 1986.
- [15] Nicholas G Polson and Vadim Sokolov. Bayesian regularization: From tikhonov to horseshoe. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 11(4):e1463, 2019.