

# Adaptive Elastic Dynamic Mode Decomposition を用いた モメンタム戦略の改良

## Improving Momentum Strategies using Adaptive Elastic Dynamic Mode Decomposition

内山 祐介<sup>1\*</sup> 中川 慧<sup>2</sup>  
Yusuke Uchiyama<sup>1</sup> Kei Nakagawa<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 株式会社 MAZIN

<sup>1</sup> MAZIN Inc.

<sup>2</sup> 野村アセットマネジメント株式会社

<sup>2</sup> Nomura Asset Management Co, Ltd.

**Abstract:** 動的モード分解 (DMD: Dynamic Mode Decomposition) は多変量時系列データのダイナミクスを安定・中立不安定多様体に対応した固有モードの重ね合わせによって表現する、流体解析の分野で提案された新しい手法である。動的モード分解は対象とする多変量時系列の支配方程式を陽に必要とせず、データのみから時空間ダイナミクスの構造を抽出する。また、DMD は時間および空間変数の次元削減手法であり、高次元の時空間ダイナミクスに埋め込まれた本質的に重要な低次元の時空間的特徴を抽出することが可能となる。この特徴を利用すると、多変量時系列の複雑な時間発展の中から単一方向のトレンド成分に対応するモードを抽出することができる。本研究では、スパースな時空間構造を抽出するため、DMD を拡張した Adaptive Elastic DMD (AEDMD) を提案し、これを用いて伝統的なモメンタム戦略の改良を行う。具体的には、価格系列に対して AEDMD を適用し、価格系列の背後にある時空間構造に基づいた価格トレンドの推定を行う。推定されたトレンドに基づいて売買を行うことで、単純な過去のトレンドに基づくモメンタム戦略を上回ることが可能であることを実証する。

## 1 はじめに

株や債権、為替といった金融資産の価格変動は市場における投資家の行動や、各国の経済動向、感染症の拡大や自然災害の発生といった大小様々な要因によって決定づけられる。これらの要因が変動する時間スケールが異なることから、金融資産の価格変動はマルチタイムスケール性を持つといえる。この性質は市場におけるトレンドとして捉えられ、それに基づいたモメンタム戦略をとる投資家も存在する。したがって、時系列が有するマルチタイムスケール性を推定することは投資戦略の観点からも有益であるといえる。

複雑系において頻繁に観測される非線形ダイナミクスは、一般に異なるスケールの時空間変動を示すことが知られている。こうした系の観測量を様々な運動モードに分解する方法として、クープマンモード分解法が提案された [1]。これは、クープマン作用素と呼ばれる非

線形力学系の観測量に対して定義された線形作用素の離散スペクトルに対応する固有モード系によって観測量を表現する方法である。対象とする系が非線形系であっても、クープマン作用素を導入することにより線形作用素に対する解析が行えるようになることがこの方法の利点である。クープマンモード分解法は、対象とする非線形ダイナミクスを記述する支配方程式に関する情報が得られていない状況であっても、観測データからダイナミクスを再構成することができる。したがって、金融資産価格変動のような時系列データは観測されるものの第一原理となる支配方程式が存在しない対象の解析に適しているといえる。

クープマンモード分解を具体的に実行する際にいくつかの方法が提案されているが、これらの中でも活発に研究されているものとして動的モード分解 (DMD: Dynamic Mode Decomposition) が知られている [2]。DMD は気象科学の分野を中心に使用されていた固有直交モード分解法を動的モードに拡張することでダイナミクスの解析が行えるようにした手法であり、特に流体力学の分野での応用が盛んに行われている。また、金

\*連絡先：株式会社 MAZIN  
〒111-0035 東京都台東区西浅草 3 丁目 29-14  
E-mail: uchiyama@mazin.tech

融の分野における応用もはじめられており [3, 4], DMD を使用した投資戦略や景気循環の推定に関する事例が報告されている [5].

多変量の時系列が与えられたとき, 現時刻の状態量を 1 期先の状態量に写す線形写像を特異値分解 (SVD) によって推定することで DMD は実行される. したがって, なにかしらの基準に従って分析者が設定した SVD の特異値行列の階数だけ動的モードが得られることになる. SVD の階数決定における分析者の恣意性を排除することを目的に, SVD の目的関数に  $L^1$  正則化項を付与したスパース DMD が提案された [6]. これにより, 適切な動的モードの選択が可能となることが期待される.

スパース DMD は SVD の目的関数に  $L^1$  正則化項を付与することで実現されるが, 線形回帰における正則化の理論においては  $L^1$  正則化だけでは不十分であることが指摘されている. 具体的には, 対象とするデータから構成されるベクトルの中に比較的相関の強い成分の組が存在すると, それらのうちの 1 成分しか選択されない性質がある. また, 変数選択の際に一致性と漸近正規性とを合わせてオラクル性というが,  $L^1$  正則化のみではオラクル性を満たさないことが指摘されている. 線形回帰におけるこれらの問題を解決する正則化法として, Adaptive Elastic Net という手法が提案されている [7].

本研究では, スパース DMD の階数決定における問題を解決することを目的に, Adaptive Elastic Net を DMD に適用した Adaptive Elastic Dynamic Mode Decomposition (AEDMD) を提案する. それと同時に, これを用いたモメンタム戦略を提案し, 従来のモメンタム戦略に対する優位性を株式先物指数を用いた実証分析によって提示する.

## 2 関連研究

### 2.1 クープマン作用素

観測量が常微分方程式や発展方程式の解として定義されるとき, 観測量の関数に対してクープマン作用素は定義される [8]. ここでは, 配位空間  $\mathcal{M}$  上の点  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  と写像  $\mathbf{f}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  に対して, 以下の常微分方程式が与えられているとする.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

ここで観測量  $\mathbf{x}$  は正の実数  $t$  をパラメータに持つため,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  である. また, 写像  $\mathbf{f}$  は十分になめらかであるとする. このとき, 配位空間  $\mathcal{M}$  上で定義された関数  $g: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  全体からなる空間に対して内積

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int g_1(\mathbf{x})g_2(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (2)$$

を導入すると, この空間は  $L^2$  ノルム

$$\|g\|_{L^2} = \left( \int g(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

によってヒルベルト空間となる. クープマン作用素  $\mathcal{K}$  はこのヒルベルト空間の上に

$$\mathcal{K}g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \quad (4)$$

によって定義される線形作用素である. したがって, 有限次元の配位空間上の点の運動は式 (1) によって定められる非線形ダイナミクスであったとしても, クープマン作用素を導入することにより無限次元空間上の線形ダイナミクスとしてとらえることができるようになる.

クープマン作用素はヒルベルト空間の上で定義された線形作用素であるから, スペクトル分解が可能である. すなわち, 固有値問題

$$\mathcal{K}\varphi = \lambda\varphi \quad (5)$$

によって定められるスペクトルと固有関数によって展開することができる. ここでは簡単のため離散スペクトル  $\{\lambda_n | n \in \mathbb{N}\}$  のみ存在したとすると,

$$\mathcal{K}g = \sum_n \lambda_n \varphi_n \quad (6)$$

によって展開される. これにより, 対象としているダイナミクスを固有関数 (モード) の特徴に基づいて捉えることができるようになる.

### 2.2 動的モード分解

実世界で観測されたデータに対してクープマン作用素の固有関数展開を適用する際には, データ空間の次元が有限であることから, なにかしらの近似を行う必要がある. このような近似手法の一つとして提案されたのが DMD である [2].

観測データの系列  $\{\mathbf{x}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ ,  $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^N$  に対して観測行列

$$X_1 = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{T-1} \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \quad (7)$$

および

$$X_2 = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_T \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \quad (8)$$

を導入する. ここで, これらの観測行列に対して

$$X_2 \approx AX_1 \quad (9)$$

を満たす行列  $A$  が存在したとすると,

$$A = X_2 X_1^\dagger \quad (10)$$

が  $A$  の推定値として得られる. ここで,  $X_1^\dagger$  は観測行列  $X_1$  のムーア・ペンローズ逆行列である. 一般に観測行列は高次元であるため, 行列  $A$  を直接求めることは計算上の困難を伴う. そこで, 観測行列  $X_1$  を

$$X_1 = U \Sigma V^* \quad (11)$$

と特異値分解すると

$$A = X_2 V \Sigma^{-1} U^* \quad (12)$$

が得られる. ここで, 行列  $A$  の低ランク射影を

$$\tilde{A} = U^* A U \quad (13)$$

とし, 行列  $\Lambda$  を対角行列とすると, 固有値問題

$$\tilde{A} W = W \Lambda \quad (14)$$

が導出される. ここで,  $W$  は行列  $\tilde{A}$  の固有ベクトルからなる行列であり, 行列  $\Lambda$  は固有値を成分として持つ対角行列である. これらを用いて得られる行列

$$\Phi = X_2 V \Sigma^{-1} W \quad (15)$$

の列ベクトル  $\phi_k$  が行列  $A$  の動的モードである. ここで, 行列  $\Lambda$  の要素  $\lambda_k$  と時系列データのサンプリング間隔  $\Delta t$  から

$$\omega_k = \frac{\ln \lambda_k}{\Delta t} \quad (16)$$

を導出し, 初期値  $\mathbf{x}_0$  と行列  $\Phi$  に対して

$$\mathbf{x}_0 = \Phi \mathbf{b} \quad (17)$$

をみたすベクトル  $\mathbf{b}$  を求めると, 観測データが従うダイナミクスは

$$\mathbf{x}_t = \sum_{k=1}^r \phi_k e^{\omega_k t} b_k \quad (18)$$

によって構成される. ここで,  $r$  は行列  $\Sigma$  のランクである. 以上が, DMD の実施手順である. 式 (18) からわかるように, 行列  $A$  の低ランク近似における  $r$  の値によって DMD の結果は異なる.

### 2.3 スパース DMD

DMD によって得られる動的モード数の選択において, 低ランク近似のランク数  $r$  の決定は分析者に委ねられる. ランク数  $r$  の決定を自動的に行うことを目的に, スパース DMD が開発された [6].

式 (18) と観測行列  $X_1$  の定義より, 対角行列

$$D_b = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_r) \quad (19)$$

および, ヴァンデルモンド行列

$$V_{\text{and}} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{T-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{T-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \dots & \lambda_r^{T-1} \end{pmatrix} \quad (20)$$

に対して, DMD が観測データのダイナミクスを再構成できているときには

$$X_1 \approx \Phi D_b V_{\text{and}} \quad (21)$$

が有効に成り立っているといえる. そこで,  $m \times n$  行列  $Z$  のフロベニウスノルム

$$\|Z\|_F = \sqrt{\sum_{i=1, j=1}^{m, n} |z_{i,j}|^2} \quad (22)$$

によって, 評価関数

$$J(\mathbf{b}) = \|X_1 - \Phi D_b V_{\text{and}}\|_F \quad (23)$$

を導入すると, DMD はこの評価関数の最小値問題と等価であることがわかる.

この評価関数に対して  $L^1$  正則化項

$$g_1(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^r |b_i| \quad (24)$$

を付与し, 最小値問題

$$\arg \min_{\mathbf{b}} J(\mathbf{b}) + \gamma g_1(\mathbf{b}) \quad (25)$$

を解くことで, ランク数  $r$  も同時に決定することが可能となる. ここで,  $\gamma > 0$  は正則化項の寄与度を表すパラメータである. 式 (25) を最小値問題の解として得られるモード展開をスパース DMD と呼ぶ.

## 3 Adaptive Elastic Dynamic Mode Decomposition

DMD ではダイナミクスの低ランク近似におけるランク数  $r$  の決定に際して自由度が残されていたが, スパース DMD は  $L^1$  正則化項付きの最小値問題を解くことによりランク数  $r$  を自動的に決定することが可能となった. これは  $L^1$  正則化の変数選択能力によるものである.

一方で,  $L^1$  正則化には以下に示す問題点があることも指摘されている.

1. 観測データセット数を  $N$ , 観測データからなるベクトルの要素数を  $p$  としたときに, たかだか  $N$  個までの変数が選択される.
2. 観測データからなるベクトルの各要素ごとに強い相関がある場合には, それらの中から 1 つだけ変数が選択される.
3. オラクル性, すなわち, 変数選択の一致性と選択された変数の漸近正規性が保証されていない.

これらの問題点を解決することを目的に, いくつかの正則化項付き線形回帰モデルが提案されている. 本研究では, 上記 3 つの問題点すべてを解決することを目的に解決された Adaptive Elastic Net [7] とよばれる手法を DMD に適用する.

まず, 以下の式で定義される  $L^2$  正則化項

$$g_2(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^r |b_i|^2 \quad (26)$$

を式 (25) に追加した最小値問題

$$\arg \min_{\mathbf{b}} J(\mathbf{b}) + \gamma_1 g_1(\mathbf{b}) + \gamma_2 g_2(\mathbf{b}) \quad (27)$$

を考える. ここで,  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  はそれぞれの正則化項の寄与度あらかずパラメータである. この正則化項付き回帰問題は Elastic Net とよばれている. 式 (27) の解を  $\mathbf{b}_{\text{ELS}}$  としたときに, 重み係数  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$  を

$$w_i = \left( b_{\text{ELS},i} - \frac{1}{N} \right)^{-\eta} \quad (28)$$

によって定める. ここで,  $N$  は観測データセットで,  $\eta$  は正の実パラメータである. この重み係数を用いて,

$$g'_1(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^r w_i |b_i| \quad (29)$$

なる正則化項を導入すると, 正則化項付き最小値問題

$$\arg \min_{\mathbf{b}} J(\mathbf{b}) + \gamma'_1 g'_1(\mathbf{b}) + \gamma_2 g_2(\mathbf{b}) \quad (30)$$

が得られる. この最小値問題の解は, 先に挙げた  $L^1$  正則化の問題点をすべて解決しているためスパース DMD の改良版と見ることが出来る. 式 (30) を解くことで得られるモード展開が本研究で提案する AEDMD である. ここでは, 単純なモメンタム戦略と AEDMD を用いた改良版モメンタムとのパフォーマンス比較を行う.

### 3.1 データセット

本研究では, 表 1 に示す 15 個の株式先物指数の日次データを用いた分析を行う. データの使用期間は 2000 年 5 月から 2020 年 4 月までの 20 年間とする.

### 3.2 分析手順

次の手順で AEDMD を用いたトレンド予測を行い, 各株式先物指数の投資ウェイト  $w_i$  を決定する.

- サンプル数分のデータを指数化<sup>1</sup>する.
- 直近の価格  $p_t$  と AEDMD の式 (30) から 20 日先の価格  $\hat{p}_t$  を予測する.
- 予測した価格と直近の価格から騰落率  $\hat{r}_i = \hat{p}_t/p_t - 1$  を計算する.
- 騰落率のランクを用いて各資産のウェイトを  $w_i = 1/20 \times (\text{rank}(\hat{r}_i) - N/2)$  と決める [9].

また比較手法として用いる単純なモメンタム戦略は, サンプル数分の過去のリターンの合計を予測リターンとして用いる.

時点  $t$  におけるポートフォリオのリターンは

$$R_t = \sum_{j=1}^{15} r_{j,t} w_{j,t-1} \quad (31)$$

によって求められる. ここで  $r_{j,t}$  は株式先物指数  $j$  の時点  $t$  におけるリターンであり,  $w_{j,t-1}$  は株式先物指数  $j$  の時点  $t$  におけるウェイトを表す. ポートフォリオのリターンから計算される平均リターン (Mean), 標準偏差で表されるリスク (SD), リスク・リターン (SR) を用いてそれぞれのモメンタム戦略のパフォーマンスを評価する. 各指標の定義を以下に示す.

$$\text{Mean} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t \quad (32)$$

$$\text{SD} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_t - \text{Mean})^2} \quad (33)$$

$$\text{SR} = \text{Mean}/\text{SD} \quad (34)$$

### 3.3 分析結果

分析結果は表 2 の通りである. なお, 表中のサンプル数は上記分析手順で示したサンプル数を表す. サンプル数が 250 および 750 の場合を除くすべてのサンプル数で, AEDMD を用いたモメンタム戦略は単純なモメンタム戦略を大幅に上回っていることが確認できる. これは, それらの状況において AEDMD のトレンド予測能力が優れているからであると考えられる.

<sup>1</sup> 価格水準を調整するために最初の値を 1 とし, 以降はサンプル数分の騰落率を乗算する.

表 1: 取引対象の株式先物指数

Equity	S&P500	NASDAQ	CA	GB	FR	DE	EU	ES
	(SP)	(NQ)	(PT)	(Z)	(CF)	(GX)	(VG)	(IB)
future	NL	CH	NIKKEI	TOPIX	HK	AU	SG	
(15 assets)	(EO)	(SM)	(NK)	(TP)	(HI)	(XP)	(QZ)	

表 2: シミュレーション結果

DMD									
サンプル数	20	40	60	120	250	500	750	1000	1250
Mean	-0.002%	0.000%	0.001%	0.000%	0.003%	0.007%	0.006%	0.007%	0.009%
SD	0.064%	0.064%	0.062%	0.065%	0.063%	0.061%	0.058%	0.056%	0.055%
SR	<b>-2.913%</b>	<b>0.285%</b>	<b>2.058%</b>	<b>0.683%</b>	4.541%	<b>11.682%</b>	10.443%	<b>12.942%</b>	<b>16.035%</b>
Momentum									
サンプル数	20	40	60	120	250	500	750	1000	1250
Mean	-0.002%	0.000%	0.001%	0.000%	0.004%	0.005%	0.007%	0.006%	0.007%
SD	0.064%	0.064%	0.061%	0.065%	0.065%	0.066%	0.061%	0.060%	0.060%
SR	-3.065%	-0.472%	1.513%	0.317%	<b>5.432%</b>	8.061%	<b>11.024%</b>	10.840%	11.251%

## 4 まとめ

本研究では, DMD に Adaptive Elastic Net を応用することで多変量時系列データからスパースな時空間構造を抽出することが可能な AEDMD を提案した. 提案手法の有効性を検証することを目的に, AEDMD をモメンタム戦略に応用し, 従来手法とパフォーマンスを比較した. その結果, AEDMD は従来のモメンタム戦略と比較して金融市場のトレンド予測能力が高いことが確認された.

従来の DMD や本研究で提案した AEDMD は複雑な挙動を示す多変量時系列のダイナミクスを抽出する手法であるが, それらの実施手順から明らかなようにランダムな外乱を受けることを想定はしていない. 一方で, 一般に金融の諸問題に現れる時系列はランダムな外乱を受けることを前提としたモデル化が行われている. DMD の拡張モデルの中にはベイジアン DMD と呼ばれるランダムな外乱を受けている多変量時系列から動的モードを推定する手法が存在する. 本研究で提案した AEDMD をこの方向に拡張することで, ランダムな外乱に対するロバスト性を高めることが今後の課題である.

## 参考文献

- [1] Igor Mezić. Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions. *Non-linear Dynamics*, Vol. 41, No. 1-3, pp. 309–325, 2005.
- [2] Peter J Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of fluid mechanics*, Vol. 656, pp. 5–28, 2010.
- [3] Jordan Mann and J Nathan Kutz. Dynamic mode decomposition for financial trading strategies. *Quantitative Finance*, Vol. 16, No. 11, pp. 1643–1655, 2016.
- [4] Noemi Nava, Tiziana Di Matteo, and Tomaso Aste. Financial time series forecasting using empirical mode decomposition and support vector regression. *Risks*, Vol. 6, No. 1, p. 7, 2018.
- [5] Ling-xiao Cui and Wen Long. Trading strategy based on dynamic mode decomposition: Tested in chinese stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 461, pp. 498–508, 2016.
- [6] Mihailo R Jovanović, Peter J Schmid, and Joseph W Nichols. Sparsity-promoting dynamic mode decomposition. *Physics of Fluids*, Vol. 26, No. 2, p. 024103, 2014.
- [7] Hui Zou and Hao Helen Zhang. On the adaptive elastic-net with a diverging number of parameters. *Annals of statistics*, Vol. 37, No. 4, p. 1733, 2009.

- [8] BO Koopman and J v Neumann. Dynamical systems of continuous spectra. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 18, No. 3, p. 255, 1932.
- [9] Ralph SJ Koijen, Tobias J Moskowitz, Lasse Heje Pedersen, and Evert B Vrugt. Carry. *Journal of Financial Economics*, Vol. 127, No. 2, pp. 197–225, 2018.