人工知能学会研究会資料
SIG-FIN-024

t 過程潜在変数モデルによるポートフォリオ生成

Portfolio Construction by t-Process Latent Variable Model

内山 祐介 [1,3*]　中川 慧 [2]
Yusuke Uchiyama[1,3] Kei Nakagawa[2]

[1] 株式会社 MAZIN
[1] MAZIN Inc.
[2] 野村アセットマネジメント株式会社
[2] Nomura Asset Management Co, Ltd.
[3] 筑波大学 システム情報系
[3] University of Tsukuba Faculty of Engineering, Information and Systems

Abstract: ガウス過程を潜在変数空間に拡張したものとして, ガウス過程潜在変数モデルが提案されており, 金融データの分析に使用した事例も報告されている. 一方で, 金融データは正規分布よりも裾の厚い確率分布に従うことから, ガウス過程潜在変数モデルによる分析では希少事象の生起確率を正確に推定できないことが懸念される. 本研究では, 裾の厚い確率分布に従うデータの分析に使用されるスチューデントの t-分布に基づいた, t-過程潜在変数モデルを提案する. このモデルを使用したポートフォリオ生成を行った結果, ガウス過程潜在変数モデルよりも良好な成績を収めた.

1　はじめに

機械学習で用いられる様々なアルゴリズムにおいて, データの生成モデルは特徴量が従う確率密度関数として与えられる. これらの学習モデルから確率変数としてスカラー量やベクトル量が抽出されるのに対して, 関数を抽出する生成モデルを考えることもできる. このような生成モデルは確率過程として知られており, 代表的なものはガウス過程である [1].

ガウス過程とは確率過程の一種であって, 任意に選択した有限個の確率変数の組の結合分布関数が正規分布で与えられる. 物理学や生物学の分野では, 時間変化する観測量のモデル化に確率過程が使用されてきたが, 入力変数は時間に限定されることなくどのような量であってもよい. 通常の正規分布と同様に, ガウス過程もまた平均と分散を与えれば確率密度関数の形状が一意に定まる. 通常の正規分布との違いは, ガウス過程の平均と分散は入力変数の関数として与えられる点である.

ガウス過程はまた, 重み係数が従う事前分布を分散が有限な確率密度関数で与えた際に, ベイジアンニューラルネットワークのノード数を無限大にとった極限として導出される. そのため, ガウス過程はニューラルネットワークと同等の表現力を有することが知られている [2]. 単層のニューラルネットワークに限らず, 深層ニューラルネットワークの極限としてもガウス過程が導出されることが報告されている [3]. 多くの学習モデルは入力に対する出力を点推定するのに対して, ガウス過程は平均関数による点推定に加えて分散関数による不確実性の推定も同時に行なえることが利点である.

近年, ガウス過程の金融分野への応用が積極的に進められている. 一例として, ポートフォリオ生成 [4] やコピュラに基づいた多変数間の動的相関の推定 [5], デリバティブの価格に関連するインプライド・ボラテリィリティの推定 [6] が挙げられる. これらの応用事例が報告されている一方で, ガウス過程は正規分布に基づいた学習モデルであるという点には注意する必要がある. 実際, 金融時系列は正規分布よりも裾が厚い確率分布に従うことが実証研究によって報告されている [7].

ガウス過程を裾が厚い確率分布に従うデータに拡張した学習モデルとして, t-過程が提案された [8]. このモデルから生成されたデータはスチューデントの t-分布に従うため, べき乗則に従って裾が広がる確率分布から生成されたデータのモデル化に適用することが可能である. t-過程は平均関数と共分散関数に加えて自由度と呼ばれるパラメータを与えると一意に決定される. 深層ニューラルネットワークの極限として得られるガウス過程を t-過程に拡張した, 深層 t-過程モデルが提案され金融時系列の解析に応用されている [9].

本研究では, t-過程を潜在空間に拡張した新たな学習モデルとして, t-過程潜在変数モデルを提案する. この

*連絡先： 株式会社 MAZIN
〒 111-0035 東京都台東区西浅草 3 丁目 29-14
E-mail: uchiyama@mazin.tech

モデルは裾が厚い確率分布に従うデータを潜在変数を使って表現することにより, 観測データのみを使用した従来の t-過程よりも広いクラスの問題に適用することが可能である．さらに, 金融の問題への応用として, t-過程潜在変数モデルによるポートフォリオ生成を実施した結果についても紹介する．

2 先行研究

2.1 ガウス過程

任意の有限個の $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ と確率過程 $f(\cdot)$ に対して, $\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$ の同時確率密度関数が正規分布で与えられるとき, $f(\cdot)$ をガウス過程という．ガウス過程が従う確率密度関数は無限次元ベクトルが従う正規分布であるため, 平均値関数 $m(\cdot)$ と共分散関数 $K(\cdot, \cdot)$ を

$$m(x) = \mathbb{E}[f(x)], \tag{1}$$
$$K(x, x') = \mathbb{E}[(f(x) - m(x))(f(x') - m(x'))] \tag{2}$$

で定義すると, $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ が与えられたときの確率密度関数は $p(f|X) = \mathcal{N}(m(X), K(X, X))$ となる．確率過程 f がガウス過程として抽出されることを明示する際には, $f \sim \mathcal{GP}(m(\cdot), K(\cdot, \cdot))$ と表記する．簡単のため, ガウス過程の平均関数は 0 とされることが多い．共分散関数はカーネル関数 $k(\cdot, \cdot)$ により,

$$K(x, x') = k(x, x') \tag{3}$$

で与えられる．カーネル関数は非負の対称関数であるため, $K(X, X)$ は正定値対称行列となる．カーネル関数としては動的基底関数

$$k_{\mathrm{RBF}}(x, x') = \alpha \exp(-l^{-2}||x - x'||^2) \tag{4}$$

が最もよく用いられている．動的基底関数はハイパーパラメータとして α と l を持つ．これらは最尤推定等の最適化法によって決定される．

観測データの組 $\mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$ に対して $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$, $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$ とする．この (X, Y) を学習させたガウス過程から, 未知のデータ $X^* = [x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*]^T$ に対する予測値 $Y^* = [y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*]^T$ は, 平均関数 f^* と共分散関数 K^* がそれぞれ

$$f^* = m_X + K_{X^*, X} K_{X,X}^{-1} Y, \tag{5}$$
$$K^* = K_{X^*, X^*} - K_{X^*, X} K_{X,X}^{-1} K_{X, X^*} \tag{6}$$

で与えられる正規分布 $\mathcal{N}(f^*, K^*)$ から抽出される．

2.2 ガウス過程潜在変数モデル

与えられたデータのモデリングや分析を行う際に, より少ない次元でデータの特徴を捉えたいことがある．これは, 観測量 $y \in \mathbb{R}^D$ を $Q < D$ となるような潜在変数 $x \in \mathbb{R}^Q$ によって

$$y = f(x) + \varepsilon \tag{7}$$

と表現する際に, 写像 $f(\cdot)$ を推定する問題として定式化される．特に, 観測ノイズ ε が正規分布に従い, かつ $f(\cdot)$ がガウス過程で与えられるときには, ガウス過程潜在変数モデルと呼ばれる [10]．N 個の観測データ $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_N]^T$ に対して N 個の潜在変数 $X = [x_1, x_2, \cdots, x_N]^T$ を推定するときの尤度関数は

$$p(Y|X) = \frac{1}{(2\pi)^{ND/2}|K_{X,X}|^{D/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} Y^T K_{X,X}^{-1} Y\right) \tag{8}$$

で与えられる．ここで, 平均関数は 0 とした．尤度関数を潜在変数とカーネル関数のハイパーパラメータについて最適化することで, 観測データのガウス過程潜在変数モデルが得られる．

2.3 変分推論

式 (8) で与えられる尤度関数の最適化では過学習に陥りやすいことが知られている．そこで, $p(Y|X)$ の代わりに $p(X|Y) = p(Y|X)p(X)/p(Y)$ を最適化するベイズ学習が提案されている．一般的に $p(Y) = \int p(Y|X)p(X)\mathrm{d}X$ を解析的に求めることは困難であるため, $p(X|Y)$ を X の適当な確率密度関数 $q(X)$ で近似することを考える．その際に KL 情報量

$$\mathrm{KL}[q|p] = \int \log \frac{q(X)}{p(X|Y)} q(X) \mathrm{d}X \tag{9}$$

を最小化する．式 (9) はまた

$$\begin{aligned} \mathrm{KL}[q|p] &= -\int \log \frac{p(Y|X)p(X)}{q(X)} q(X) \mathrm{d}X \\ &+ \log p(Y) \end{aligned} \tag{10}$$

とも表現できるため, 右辺第 1 項についての最適化問題として定式化できることがわかる．ここで, $p(X)$ は潜在変数の事前分布である．この近似手法のことを変分推論という．

3 提案モデル

3.1 t-過程

ガウス過程では, 確率過程 $f(\cdot)$ が従う確率密度関数として正規分布を仮定していた．そのため, 金融時系列

のように正規分布よりも裾の厚い確率分布に従うデータに適用する際には, 正確な推定を行うことができなくなる. このようなデータに対してガウス過程を拡張したモデルが t-過程である [8]. t-過程は, 確率過程 $f(\cdot)$ が自由度 ν のスチューデントの t-分布

$$\mathcal{T}(m,K,\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{[(\nu-2)\pi]^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)|K|^{\frac{1}{2}}} \times \left[1+\frac{1}{\nu-2}(y-m)^T K^{-1}(y-m)\right]^{-\frac{\nu+n}{2}} \tag{11}$$

に従うモデルである. ここで, $m(\cdot)$ と $K(\cdot,\cdot)$ はそれぞれ平均関数と共分散関数であり, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である. 確率過程 $f(\cdot)$ が t-過程であるとき, $f{\sim}\mathcal{TP}(m(\cdot),K(\cdot,\cdot);\nu)$ と表記する. ガウス過程同様に, t-過程の平均関数も一般性を損なうことなく 0 として扱われることが多い.

t-過程の予測分布もまた t-分布となる. そのときの自由度, 平均関数および共分散関数は以下のように更新される [9].

$$\nu^* = \nu + n, \tag{12}$$

$$m^* = m + K_{X^*,X}K_{X,X}^{-1}Y \tag{13}$$

$$K^* = \frac{\nu-\beta-2}{\nu-n-2}\left[K_{X^*,X^*} - K_{X^*,X}K_{X,X}^{-1}K_{X,X^*}\right] \tag{14}$$

ガウス過程とは異なり, t-過程ではデータ数の影響が自由度と共分散関数の更新式に反映されていることが確認できる.

3.2 t-過程潜在変数モデル

ここでは, ガウス過程同様に t-過程を潜在変数モデルに拡張する. 観測データ $y{\in}\mathbb{R}^D$ と潜在変数 $x{\in}\mathbb{R}^Q$ とが t-過程 $f{\sim}\mathcal{TP}(m(\cdot),K(\cdot,\cdot);\nu)$ によって $y=f(x)$ と関係づけられることを仮定し, N 個の観測データを並べたものを $Y{\in}\mathbb{R}^{D\times N}$, N 個の潜在変数を並べたものを $X{\in}\mathbb{R}^{Q\times N}$ としたときに

$$p(Y|X) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+D}{2}\right)}{[(\nu-2)\pi]^{\frac{D}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)|K_{X,X}|^{\frac{1}{2}}} \times \left[1+\frac{1}{\nu-2}(Y-m_X)^T K_{X,X}^{-1}(Y-m_X)\right]^{-\frac{\nu+D}{2}} \tag{15}$$

で与えられるモデルを, t-過程潜在変数モデルと定義する. スチューデントの t 分布は $\nu{\to}\infty$ の極限で正規分布に収束するため, t-過程潜在変数モデルはガウス過程潜在変数モデルを内包することがわかる. また, ガウス過程潜在変数モデル同様に, t-過程潜在変数モデルにおいても一般性を損なうことなく平均関数を $m(\cdot)=0$ とすることができる.

潜在変数とハイパーパラメータは観測データに対する最尤推定によって求められる. 式 (16) に対応する対数尤度関数は

$$\begin{aligned} \log p(Y|X) &= \log\Gamma\left(\frac{\nu+D}{2}\right) - \frac{D}{2}\log[(\nu-2)\pi] \\ &- \log\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2}\log|K_{X,X}| \\ &- \frac{\nu+D}{2}\log\left(1+\frac{1}{\nu-2}\Delta\right), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\Delta = (Y-m_X)^T K_{X,X}^{-1}(Y-m_X) \tag{17}$$

で与えられる. ガウス過程同様に, t-過程潜在変数モデルに対しても式 (9) で導入された変分推論を実施することが可能である. その際に, 潜在変数の事前分布と近似分布の具体形は分析者が決定することができる.

4 実証分析

ここでは, 代表的な世界各国の株式指数を用いて t-過程潜在変数モデルおよび比較手法としてガウス過程潜在変数モデルによるポートフォリオ構築を行う. 構築するポートフォリオは先行研究同様に最小分散ポートフォリオとする. すなわち, ポートフォリオの重み係数を w とすると, 式 (8) および式 (16) の共分散行列を表す $K_{X,X}$ を用いて

$$w^* = \arg\min_w w^T K_{X,X} w \tag{18}$$

を求める. t-過程潜在変数モデルによる最小分散ポートフォリオを Port_t, ガウス過程潜在変数モデルによる最小分散ポートフォリオを Port_G とする.

データセットとしては 16 か国の株価指数を用いた. それぞれ SP500 指数 (US), SP トロント 60 指数 (Canada), FTSE100 指数 (UK), CAC40 指数 (France), DAX 指数 (Germany), IBEX35 指数 (Spain), FTSE MIB 指数 (Italy), AEX 指数 (Netherlands), OMX30 指数 (Sweden), SMI 指数 (Switzerland), 日経平均株価 (Japan), 香港ハンセン指数 (HongKong), ASX200 指数 (Australia), 韓国 200 種株価指数 (Korea), OBX 株価指数 (Norway), MSCI Singapore 指数 (Singapore) である. データ期間は 1998/1/30 から 2019/1/31 までの約 20 年分, 253 サンプル (月次) である. データは Bloomberg 端末より取得した. 各指数の統計量は表 1 の通りである. 共分散行列 $K_{X,X}$ の推定のための条件を次の通り設定した.

推定期間: 10 年分 (120 サンプル)

テスト期間: 11 年分 (132 サンプル)

カーネル関数: Exp カーネル

表 1: 使用した株式指数の月次リターンの統計量

指数	US	Canada	UK	France	Germany	Spain	Italy	Netherlands
年率リターン	6.00%	5.41%	2.39%	4.08%	6.87%	3.20%	1.35%	2.96%
年率リスク	14.93%	14.92%	13.62%	18.12%	21.13%	20.66%	21.71%	19.13%
R/R	0.40	0.36	0.18	0.23	0.33	0.15	0.06	0.15
歪度	-0.66	-0.92	-0.55	-0.38	-0.50	-0.17	0.03	-0.74
尖度	5.23	7.36	4.53	4.52	6.12	4.96	4.80	5.88

指数	Sweden	Switzerland	Japan	HongKong	Australia	Korea	Norway	Singapore
年率リターン	6.32%	2.80%	3.35%	7.27%	4.70%	12.98%	10.72%	5.05%
年率リスク	19.51%	14.68%	19.24%	23.46%	12.40%	28.80%	21.49%	21.71%
R/R	0.32	0.19	0.17	0.31	0.38	0.45	0.50	0.23
歪度	-0.19	-0.73	-0.54	0.28	-0.69	1.39	-0.93	-0.26
尖度	5.29	6.11	4.75	5.78	4.54	11.63	6.84	6.81

表 2: ガウス過程潜在変数モデル, および t-過程潜在変数モデルに基づいて構成された最小分散ポートフォリオのパフォーマンス比較.

	Port_G	Port_t	差
前半 (2008/1∼2013/6)			
年率リターン	-4.89%	-2.63%	2.25%
年率リスク	19.57%	18.33%	-1.24%
年率 R/R	-0.25	-0.14	0.11
後半 (2013/7∼2019/1)			
年率リターン	6.08%	6.30%	0.22%
年率リスク	11.16%	10.56%	-0.60%
年率 R/R	0.54	0.60	0.05
全期間 (2008/1∼2019/1)			
年率リターン	0.64%	1.87%	1.23%
年率リスク	15.92%	14.93%	-0.99%
年率 R/R	0.04	0.12	0.09

潜在変数: 1 個

ここで, Exp カーネルは

$$k_{\mathrm{Exp}}(x, x') = \alpha \exp(-l^{-2}||x - x'||) \tag{19}$$

で定義されるカーネル関数である. 以上の条件のもと, Port_t と Port_G の年率リターン, リスク, および R/R を比較する. 表 2 は, テスト期間を前半, 後半, および全期間に分けた際のパフォーマンス比較結果である. 前半はリーマンショックを含む下落局面であり, 後半は世界的な金融緩和に伴い株式市場の上昇局面であった. 表 2 から, 前半の下落局面ならびに後半の上昇局面のいずれにおいても, リターン, リスク, および R/R のすべての指標について, t-過程潜在変数モデルはガウス過程潜在変数モデルを上回っていることが確認できる.

5 まとめ

本研究では, t-過程を潜在空間に拡張した新たな学習モデルとして, t-過程潜在変数モデルを提案した. このモデルは裾が厚い確率分布に従うデータを潜在変数を使って表現することにより, 観測データのみを使用した従来の t-過程よりも広いクラスの問題に適用することが可能である. さらに, 提案手法の有効性を評価するための実証分析として, ガウス過程潜在変数モデルをベンチマークとした最小分散ポートフォリオ構築を世界各国の株価指数をもとに行った. 分析の結果, 提案手法である t-過程潜在変数モデルは相場の上昇局面, 下落局面に関わらずにガウス過程潜在変数モデルを上回った.

参考文献

[1] Carl Edward Rasmussen. Gaussian processes in machine learning. In *Advanced lectures on machine learning*, pp. 63–71. Springer, 2004.

[2] Radford M Neal. Priors for infinite networks. In *Bayesian Learning for Neural Networks*, pp. 29–53. Springer, 1996.

[3] Jaehoon Lee, Jascha Sohl-dickstein, Jeffrey Pennington, Roman Novak, Sam Schoenholz, and Yasaman Bahri. Deep neural networks as gaussian processes. In *International Conference on Learning Representations*, 2018.

[4] Rajbir S Nirwan and Nils Bertschinger. Applications of gaussian process latent variable models in finance. In *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pp. 1209–1221, 2019.

[5] David Lopez-Paz, José Miguel Henández-Lanato, and Zoubin Ghahramani. Gaussian process vine copulas for multivariate dependence. In *International Conference on Machine Learning*, pp. II10–II18, 2013.

[6] Yue Wu, José Miguel Henández-Lanato, and Zoubin Ghahramani. Gaussian process volatility model. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2014.

[7] Benoit B Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. In *Fractals and scaling in finance*, pp. 371–418. Springer, 1997.

[8] Amar Shah, Andrew Wilson, and Zoubin Ghahramani. Student-t processes as alternatives to gaussian processes. In *Artificial Intelligence and Statistics*, pp. 877–885, 2014.

[9] 中川慧, 角屋貴則, 内山祐介. 金融時系列のための深層 t 過程回帰モデル. 第 21 回 人工知能学会 金融情報学研究会 (SIG-FIN), 2018.

[10] Neil Lawrence. Gaussian process latent variable models for visualisation of high dimensional data. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2004.