

株価の対数収益率と q -Gauss 分布: リスク評価への応用

Log-returns of stocks and q -Gaussian distributions : an application to risk assessment

西岡 謙太¹ 佐藤 彰洋^{1*}¹ 京都大学 大学院情報学研究科 数理工学専攻¹ Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University

Abstract: We propose a method to assess the risk of financial time series with an unconditional distribution estimated from them. Because it is not easy to infer its tail shape due to a lack of data in a practical manner, we adapt a parametric method with a q -Gaussian distribution. We introduce Value-at-Risk (VaR) to measure risk and compare it with variance under the q -Gaussian assumption. We examine performance of the maximum likelihood estimator with the q -Gaussian log-likelihood function. By using the distribution estimates, we compute the errors, defined as the difference between estimation and the real value. Finally, we conduct an empirical analysis on log-returns of a stock traded in the Tokyo Stock Exchange by using the proposed method.

1 導入

株価の対数収益率の密度分布は fat-tail 性を有し、特に q -Gauss 分布でよくフィットできることが知られている [1]. また、 q -Gauss 分布は Gauss 分布の逆分散を χ^2 分布に従って変化させた場合の周辺分布として求められることができる [2]. このことから、株価変動においては、ボラティリティの時間不均一性が q -Gauss 分布がよく一致するひとつの原因であると考えられる。

また、 q -Gauss 分布は裾野がべき的に減少する fat-tail 性を有することから、株価のリスク分析において、tail 部分の評価が重要になる場合に損失リスクの評価に有効である。金融資産のリスク指標としてしばしば分散が用いられるが、分散を用いて損失額等の下方リスクを評価することは、fat-tail 性を有する場合に、適切でないことが知られている。そのため、損失リスクの評価指標である Value-at-Risk (VaR) が導入されている。

本報告では、対数収益率が q -Gauss 分布から独立同一分布に従ってサンプルされる場合の、VaR と分散の関係を実験的に示し、分散が決まっても VaR が一意には決まらないことを述べる。また、データの観測点数が少ない場合、出現頻度の小さな裾野に対応するイベントはほとんど観測されないため、経験分布を用いて VaR を算出推定できない問題がある。そこで本稿では、有限なデータから株価の対数収益率の分布を最尤推定

し、その推定した分布を用いて VaR を推定する方法を提案する。

提案手法の有用性を示すために、一般化 Box-Muller 法を用いて生成した q -Gaussian サンプルに対して q -Gauss 分布のパラメータを最尤推定し、真の分布と推定した分布を比較することで最尤法を用いた VaR の推定の妥当性を検証した。更に、提案手法を用い、実際の株価データを用いて VaR の推定を行った。

本稿は以下の構成からなっている。2 節では q -Gauss 分布の定義と一般化 Box-Muller 法について述べる。3 節では、VaR の定義と q -Gauss 分布に対する累積確率分布の解析解を示し、 q -Gauss 分布では同一の分散レベルにおいて異なる VaR を与え得ることを示す。4 節では q -Gauss 分布に対する最尤推定方法の概要を示す。5 節において東京証券取引所で取引される約 10 年分の証券データを用いて日次の対数収益率に対する実証分析を行った結果を示す。6 節で結論を述べる。

2 q -Gauss 分布と q -Gaussian サンプル

2.1 q -Gauss 分布

まず、いくつかの関数とパラメータを導入することによって q -Gauss 分布を定義する [1]. 始めに、 q -指数関数とその逆関数である q -対数関数を下式で定義する。

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad x > 0, \quad (1)$$

*連絡先: 京都大学 大学院情報学研究科 数理工学専攻
〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町
E-mail: aki@i.kyoto-u.ac.jp

$$e_q^x \equiv \begin{cases} [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}, & 1 + (1-q)x \geq 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

このとき, q -指数分布を用いて q -Gauss 分布は下式で定義される.

$$p(x; \bar{\mu}_q, \bar{\sigma}_q) = A_q \sqrt{B_q} [1 + (q-1)B_q(x - \bar{\mu}_q)^2]^{1/(1-q)} \quad (3)$$

$$= A_q \sqrt{B_q} e_q^{-B_q(x - \bar{\mu}_q)^2}. \quad (4)$$

ここで, escot 分布を用い, q -平均 $\bar{\mu}_q$ と q -分散 $\bar{\sigma}_q$ は下式で与えられる.

$$\bar{\mu}_q \equiv \langle x \rangle_q \equiv \frac{\int x [p(x)]^q dx}{\int [p(x)]^q dx}. \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}_q \equiv \langle (x - \bar{\mu}_q)^2 \rangle_q \equiv \frac{\int (x - \bar{\mu}_q)^2 [p(x)]^q dx}{\int [p(x)]^q dx}. \quad (6)$$

さらに, q -Gauss 分布のパラメータである A_q と B_q は下式で表される.

$$A_q = \begin{cases} \frac{\Gamma[\frac{5-3q}{2(1-q)}]}{\Gamma[\frac{2-q}{1-q}]} \sqrt{\frac{1-q}{\pi}}, & q < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, & q = 1 \\ \frac{\Gamma[\frac{1}{q-1}]}{\Gamma[\frac{3-q}{2(q-1)}]} \sqrt{\frac{q-1}{\pi}}, & 1 < q < 3 \end{cases} \quad (7)$$

$$B_q = [(3-q)\bar{\sigma}_q^2]^{-1} \quad q \in (-\infty, 3). \quad (8)$$

上述のように定義される, q , $\bar{\mu}_q = a$, $\bar{\sigma}_q = b$ を有する q -Gaussian 確率変数: X を, $X \sim N_q(a, b)$ と表記する.

2.2 q -Gaussian サンプルの生成法

q -Gauss 分布に従う確率変数は, 一般化 Box-Muller 法を用いることにより人工的に生成することができる [3]. 具体的には, 独立な $(0, 1)$ 上の一様乱数 U_1, U_2 を下式によって変数変換することにより得られる.

$$Z_1 \equiv \sqrt{-2 \ln_q(U_1)} \cos(2\pi U_2) \quad (9)$$

$$Z_2 \equiv \sqrt{-2 \ln_q(U_1)} \sin(2\pi U_2). \quad (10)$$

ただし, Z_1, Z_2 は互いに非独立であり, $Z_1, Z_2 \sim N_q(0, 1)$ (ただし, $q = \frac{3q-1}{q+1}$) となる. さらに, $Z \sim N_q(0, 1)$ であるとき, $aZ + b \sim N_q(a, b)$ となる性質を用いて, 任意の q -Gaussian 確率変数を生成することができる.

3 VaR と分散

株価のリスクを評価するときに, しばしば分散が用いられる. しかし株価の対数収益率が q -Gauss 分布に従うとき, 分散は損失額等の下方リスクの異なるリスクレベルを同一視してしまうため, リスク評価を見誤る可能性がある. 以下, 下方リスクの指標として Value-at-Risk (VaR) を導入し, 従来のリスク指標である分散と VaR とを比較する. $100\alpha\%$ VaR を, 株価の対数収益率の分布が従う分布の下側 $100\alpha\%$ 点と定義する. まず, 株価の対数収益率が q -Gauss 分布に従う場合の分散: σ^2 を求める. ただし, 簡単のため, 平均は 0 としておく.

$$\sigma^2 = A_q \sqrt{B_q} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 [1 + (q-1)B_q x^2]^{1/(1-q)} dx \quad (11)$$

$$= A_q (3-q)(q-1)^{3/2} \sigma_q^2 \mathcal{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{q-1}\right) \quad (12)$$

次に, 1% VaR は下式の解: h として求めることができる.

$$0.01 = A_q \sqrt{B_q} \int_{-\infty}^h [1 + (q-1)B_q x^2]^{1/(1-q)} dx \quad (13)$$

$$= \frac{A_q}{2\sqrt{q-1}} \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{q-1}\right) \left[1 - \mathcal{B}\left(\frac{(q-1)B_q h^2}{1 + (q-1)B_q h^2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{q-1}\right)\right]. \quad (14)$$

上述の分散と VaR の関係を表したものが図 1 である. この図から VaR が大きくなるに従って分散も大きくなる傾向があるが, 分散を固定しても VaR を一意に推定することはできないことがわかる. このように, 分散で下方リスクを見積もることは危険であると考えられる. 以降ではリスク指標として VaR を用いることにする.

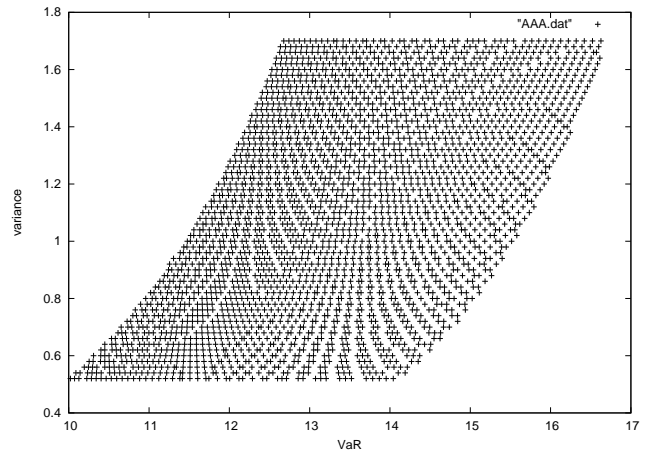


図 1: 縦軸:分散, 横軸:VaR. q の範囲は $1.4 < q < 1.5$ である.

4 q -Gaussian 時系列解析

一般化 Box-Muller 法を用いて生成した q -Gauss 分布に従う時系列に対してパラメータ $q, \bar{\mu}_q, \bar{\sigma}_q$ を最尤推定し、真の分布と推定した分布を比較することで VaR の推定の妥当性を検証する。 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ を q -Gaussian サンプルとし、 $f(x)$ を q -Gaussian 確率密度関数としたとき、最尤推定値は下式で与えられるように尤度関数を最大にする値として与えられる。

$$(q, \hat{\mu}_q, \hat{\sigma}_q) = \operatorname{argmax}_{q, \mu_q, \sigma_q} \ln \left(\prod_{i=1}^n f(x_i) \right) \quad (15)$$

図 2 は q -Gaussian 時系列に関する図、また図 3 はサンプル数 1,000、 $(q, \bar{\mu}_q, \bar{\sigma}_q) = (1.4, 0, 1)$ の q -Gaussian サンプルに対して、最急降下法を用いて最尤推定を行ったときの確率密度関数に関する図、そして図 4 は下側累積分布関数 ($F(x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds$) を片対数で描いた図である。これらの図からサンプル数 1,000 程度でも確率密度関数と VaR はうまく推定できていることが分かる。また図 3 から、推定した分布を用いることで有限のデータからは求めることができない領域の VaR も推定できていることが分かる。また図 5 はサンプル数と 0.1%VaR の推定誤差の関係を表した図である。この図は 100 から 2600 までの各時系列長 (間隔 100) に対して、真の VaR と推定した VaR の差の絶対値 ($|0.1\% \text{VaR}_{true} - 0.1\% \text{VaR}_{empirical}|$) を求める試行を 500 回行い平均を求めた図である。サンプル数を増やしていくにつれて推定誤差が小さくなっていく様子が確認できる。

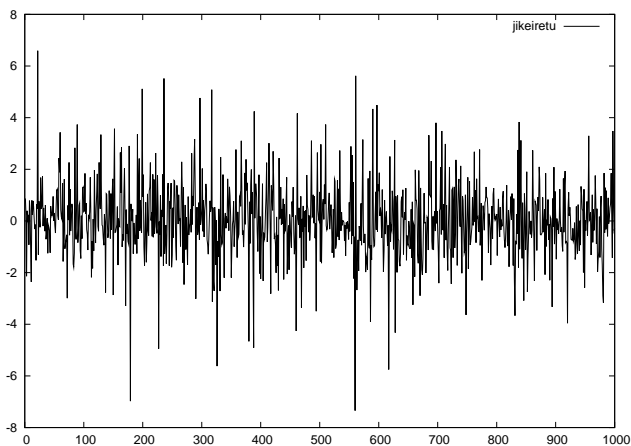


図 2: q -Gaussian 時系列を描いた。

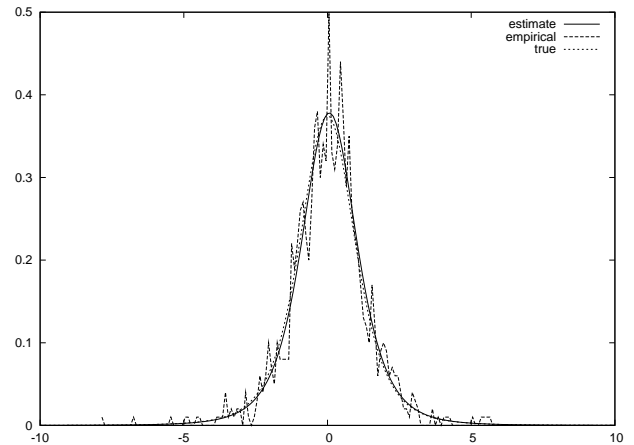


図 3: 確率密度関数の図。実線が推定、破線が実証的、点線が真の確率密度関数。

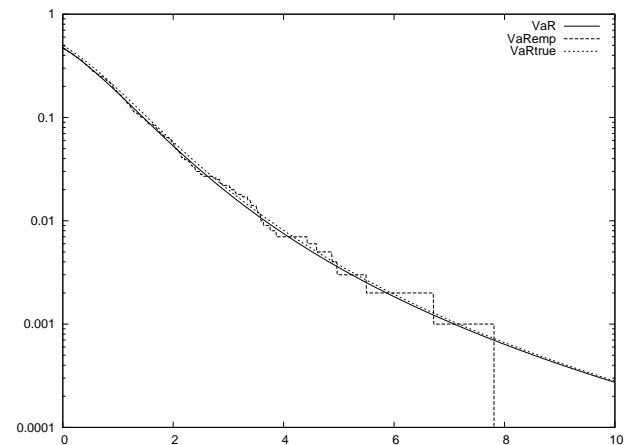


図 4: 下側累積分布関数の図。縦軸が log-scale になっている。実線が推定、破線が実証的、点線が真の累積分布関数。

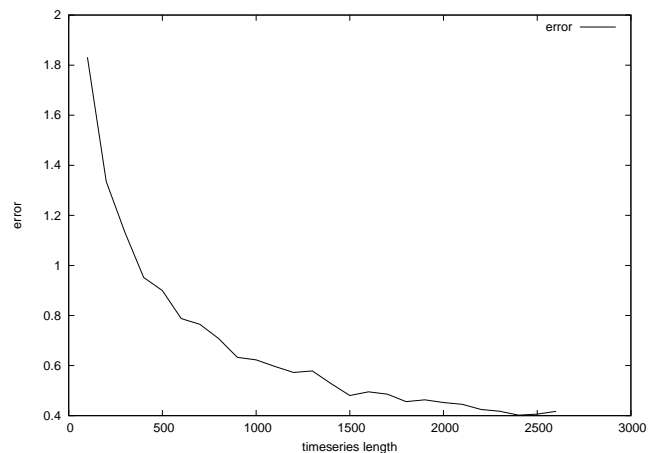


図 5: サンプル数と VaR の推定誤差の関係を表した図。

5 実データ解析

前節の結果を踏まえ、実データについても分布を最尤法を用いて推定し、さらに累積分布関数から VaR を推定した。用いたデータは、東京証券取引所一部上場企業のうち 2000/1/4 から 2010/10/22 までの営業日のデータに欠損のない企業に関するもので、本稿では豊田通商に関する解析結果を載せた。図 7 から、株価の対数収益率の分布は q -Gauss 分布によく適合していることが分かる。また図 8 から、データからは推定できない VaR を、推定した分布から見積もることができるようになったことが分かる。このような手法を用いれば、他の様々な資産や、複数の資産を同時に保有した場合の VaR の推定も行うことができる。

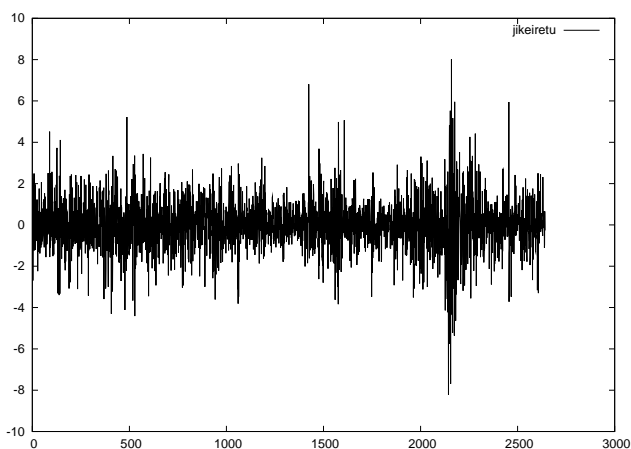


図 6: 株価の対数収益率の時系列を描いた図。

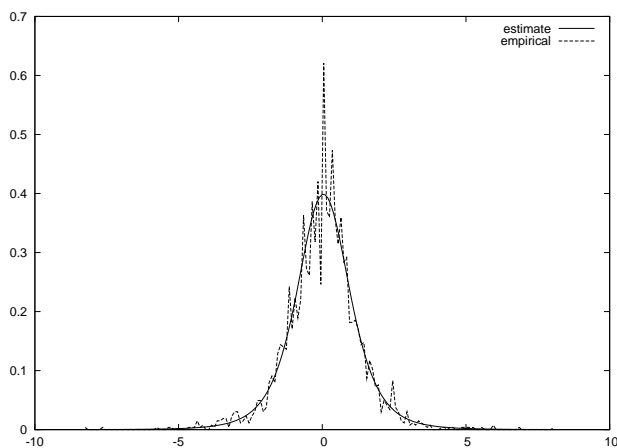


図 7: 確率密度関数の図。実線が推定、破線が実証的確率密度関数。

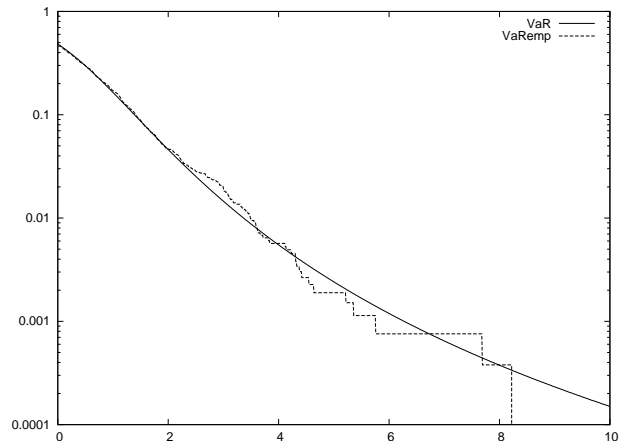


図 8: 下側累積分布関数の図。縦軸が log-scale になっている。実線が推定、破線が実証的累積分布関数。

6 結論

本稿では、リスク指標として VaR を導入し、 q -Gauss 分布を仮定した場合において分散と比較した。そして、分散で下方リスクを正確に見積もることができないことを確認した。次に、一般化 Box-Muller 法を用いて生成した q -Gaussian サンプルに対して最尤推定を行い、分布を推定した。そして、真の分布と推定した分布を比較することで VaR の推定誤差を検証した。最後に、実データに対して同様の手法を用いて VaR を推定した。

謝辞

本研究を進めるにあたって多くの方のお世話になりました。研究会で多くの指摘をしていただいた、京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻物理統計学分野の五十嵐顕人准教授、また学生の皆様へこの場をもってお礼申し上げます。

参考文献

- [1] Gell-Mann M., Tsallis C.: Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications, *Oxford University Press*, (2004)
- [2] Beck C., Cohen E.G.D.: Superstatistical generalization of the work fluctuation theorem, *Physica A*, Vol. 334, pp. 393–402 (2004)
- [3] William J. Thistleton, John A. Marsh, Kenric Nelson, Constantino Tsallis: Generalized Box-Muller Method for Generating q -Gaussian Random Deviates, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 53, No. 12