

経済物理学的手法を用いたエージェントベースモデルによる 金融市場のモデル化と応用

Agent based model of foreign exchange markets by using econophysics method and its application

山田 健太^{1*} 高安 秀樹² 高安 美佐子¹
Kenta Yamada¹ Hideki Takayasu² Misako Takayasu¹

¹ 東京工業大学大学院総合理工学研究科知能システム科学専攻
¹ Department of Computational Intelligence and Systems Science
² ソニー CSL
² Sony Computer Science Laboratories

Abstract: We introduce minimal agent based model of foreign exchange markets from the view point of econophysics. In order to reproduce major statistical properties of real market, we start from the simplest model and we add two important feedback effects to this simplest model; one is feedback effect of price change and the other is feedback effect of transaction intervals. As an application of this realistic model, we simulate the case of government intervention on exchange rate and discuss a relationship between a dealers' trend-follow effect and efficiency of the intervention.

1 イントロダクション

経済物理学という言葉は15年ほど前に統計物理の国際会議で生まれた。物理学者が経済分野に進出したきっかけとしては、コンピュータの発達により株式市場や為替市場に代表される金融市場に対して以前の日時のデータから秒単位、またはミリ秒単位のデータという時間分解能の高いデータが手に入るようになり、より詳細な解析が行えるようになった点が大きいの。また、これらのデータを解析してみると、価格差の分布のベキ則やボラティリティー（本論分では価格差の絶対値）の長時間相関など、磁石のモデルであるイジングモデルに代表される臨界現象の振る舞いとよく似た性質を持つことも物理学者を引きつけ、近年も活発に研究が行われている。

本論文では、経済物理学的手法を用いて、円ドル市場に代表される外国為替市場のモデル化を行い、その応用として政府による円ドル市場への介入のシミュレーションを行う。経済物理学と経済学や金融工学との大きな違いはそのアプローチ方法である。経済学や金融工学では最初に人間の行動や価格変動のメカニズムに効用関数やブラウン運動の仮定をおきモデル化を行い、モデルの検証としてデータと比較する。また、この比

較が不十分であったことが、昨今の金融危機の一つの原因であると考えられる。一方、経済物理学的手法では初めに秒単位やミリ秒単位の高頻度データを徹底的に解析することにより、解析対象から観測される普遍的な経験則を確立し、それらを再現するモデルを必要最小限の仮定とパラメータを用いてモデル化を行う。もし、観測される経験則を再現できるモデルが構築できれば、このモデルを用いて誰もが手軽にシミュレーションを行える実験場ができたことに相当し、金融市場の安定化などの応用が期待される。

2 実データから観測される経験則

本論分で使用する外国為替市場のデータは、250ミリ秒単位のタイムスタンプが付いたデータであり、非常に情報量が多く、時々刻々の市場の変化を追うことが可能である。図. 1に2008年の市場価格と取引間隔の時系列の一部を示す。このティックデータから観測される主要な統計性には以下のものがあり、金融工学で仮定されてきたブラウン運動からは観測されない実証結果がいくつもある。

1. 市場価格 $P(n)$ の価格差 $\Delta P = P(n) - P(n-1)$ の分布はベキ指数3程度のベキ分布に従う [9][10][11].
2. 価格差 $\Delta P(n)$ の異時刻相関 $C(k)$ は1ティック目

*連絡先：東京工業大学大学院総合理工学研究科
神奈川県横浜市緑区長津田町 4259 G3-52
E-mail: yamada@smp.dis.titech.ac.jp

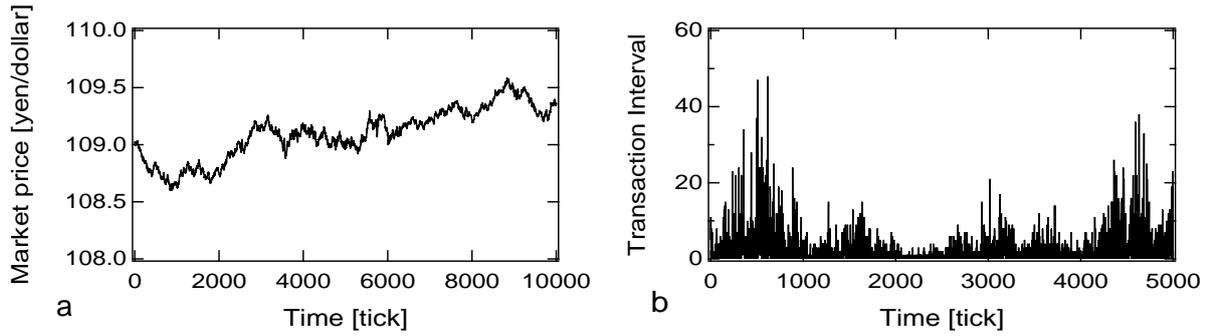


図 1: a: 10000tick 間の円ドル市場の価格. b: 5000tick 間の取引間隔. 取引が成立すると 1 つ進む時間の単位をティック [tick] と呼ぶ.

に負の相関をとる. これは, 1tick 前の価格が上がった後は下がりやすく下がった後は上がりやすいことを意味している. しかし 2 ティック目以降は, ほとんど相関がない. この結果から価格変動の予測が不可能であるといわれることがしばしばある. 価格差の絶対値 (ボラティリティー) $|\Delta P(n)|$ には数週間から数ヶ月にわたる長時間相関がある [9][12]. これは, 市場が荒れた場合などに大きな変動が続けて起こりやすいことを示唆している. ここで, 相関関数 $C(k)$ は

$$C(k) = \frac{\langle (x(n) - \langle x \rangle)(x(n+k) - \langle x \rangle) \rangle}{\sigma^2} \quad (1)$$

であり, $\langle x \rangle$, σ^2 はそれぞれ x の平均値と分散である.

3. 以下で定義される価格の拡散は,

$$\sigma(k) = (\langle \{P(n+k) - P(n)\}^2 \rangle - \langle P(n+k) - P(n) \rangle^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

時刻が k 経過したとき, 到達した価格の分布の標準偏差を計算していることに相当する. 為替の価格においては小さな k の領域ではランダムウォーク時の σ と k の関係 ($\sigma \propto k^{1/2}$) とは異なり, 大きな領域ではランダムウォークと同じ関係を持つ [13].

4. 高安 (美) らによって提案された PUCK (Potentials of Unbalanced Complex Kinetics) モデルを用いた解析により, 市場価格 $P(n)$ から市場価格中のポテンシャルを観測することができる. これは, 市場価格のダイナミクスが確率的な効果だけでなく, 動力学的な効果を含むことを意味する [14][15].
5. 取引間隔は発生確率が一定の時に見られるポアソン過程には従っておらず, 過去の取引間隔に依

存する非ポアソンの発生間隔に従っており, その分布は指数分布よりも厚い裾野を持つ [16][17]. この非ポアソン性は, 直感的にいうと市場で活発に取引が行われ, 取引間隔が短くなりだすと, さらに市場が活発になり, より取引間隔が短くなる傾向があり, 逆に市場が落ち着き, 取引間隔が長くなり始めるとさらに長くなる傾向があることに起因する.

リストの 1~4 番目は市場価格に対する統計的性質であり, 5 番目は取引間隔の時系列に対する経験則である. これらの統計性を満たすことを目的とした, 物理モデルには, 板モデル [18]-[21], ファンダメンタリスト vs. チャーティストモデル [22][23][24], マイノリティーゲームモデル [25][26][27], スピンベースモデル [28][29][30], そして本論分で紹介するディーラーモデル [31][32][33][34][35] がある.

3 ディーラーモデルの構築と解析

ディーラーモデルは市場のディーラーの行動をモデル化するエージェントベースモデルの一種であり, 決定論的ディーラーモデルが高安 (秀) らによって最初に提案された [31]. その後, 佐藤らによってディーラーモデルから生み出させる価格変動の分布がベキ分布になるメカニズムが解明され [33], 近年, 著者らが提案した確率論的ディーラーモデルによってさらに理論的な解析が進み, また現実市場の主要な統計性を全て再現できるようになった [35].

本論分では初めに最も単純な確率論的ディーラーモデル (基礎モデル) を提案する. この人工市場にディーラーはたった 2 人しか存在せず, それぞれのディーラーの提示する指値は単純なランダムウォークにしたがって時間発展を行っている. 後に示すように, この最も単純なモデルでは市場の統計性を再現することはでき

ない。しかし、この単純なモデルにたった二つの効果を加えることによって主要な市場の統計的性質を全て再現することができる。一つは、過去の取引間隔が現在のディーラーのアクティビティーに影響を与える取引間隔のフィードバック効果、もう一つはディーラーが過去の価格を参考に未来を先読みをする価格変動のフィードバックの効果である。そして、二つの効果を加えたダブルフィードバックディーラーモデルが現実の市場に非常に良くフィットすることを示す。

3.1 基礎ディーラーモデル

図. 2 にモデルの基本的な時間発展を示す。各ディーラーは自分がいくら以下で買いたいかという買い値といくら以上で売りたいという売り値をセットにした指値を市場に提示している。丸が買い値、四角が売り値を表している。ディーラーは安く買って高く売ることによって利益を得ようとするので、売りの方が買い値よりも高い。簡単化のために、 i 番目のディーラーの買い値と売り値の距離 L_i は各ディーラー一定とする ($L_i = L$)。また、時刻 t における i 番目のディーラーの買い値と売り値の中間値を $p_i(t)$ とし (3) 式のように時間発展を定義する。ある時刻 t において各ディーラーの買い値と売り値がマッチングしない時 [図.2(a)] は、取引が成立せず以下の時間発展方程式に従って $p_i(t)$ をランダムに変化させる [図.2(b)]。

$$p_i(t + \Delta t) = p_i(t) + c f_i(t) \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

$$f_i(t) = \begin{cases} +\Delta p & (\text{prob. } 1/2) \\ -\Delta p & (\text{prob. } 1/2) \end{cases}.$$

ここで $f_i(t)$ はノイズであり、確率 $1/2$ で $+\Delta p$ をとり、確率 $1/2$ で $-\Delta p$ をとり、 c はノイズの大きさを決めるパラメータである。

あるディーラーの買い値と他のディーラーの売り値がぶつくと [図.2(c)] 取引が成立し市場価格 $P(n)$ と取引間隔 $I(n)$ がそれぞれ発生する。 n は取引が成立すると 1 ずつ進む時間の単位であり、市場価格と取引間隔はそれぞれ $P(n) = \{p_1(t) + p_2(t)\}/2$ 、 $I(n) = t - t'$ で与えられる。ここで、 t' は一つ前の取引が成立した時刻を表す。取引を行ったディーラーは再び取引を行う為に指値の中間値を $p_i(t) = P(n)$ と市場価格に設定する [図.2(d)]。

以上のルールに従ってシミュレーションを行った結果を図.3 に示す。必要なパラメータはそれぞれ、 $L = 0.01$ 、 $c = 0.01$ 、 $\Delta p = 0.01$ 、 $\Delta t = \Delta p \cdot \Delta p$ と設定した。図.3 の (a) は市場価格であり、変動に相関はなくランダムウォークに従っており、変動の大きさは、図.3 の窓グラフに示すように、値の大きな領域では指数関数に従っている。(b) の取引間隔はポアソン過程に従っており、

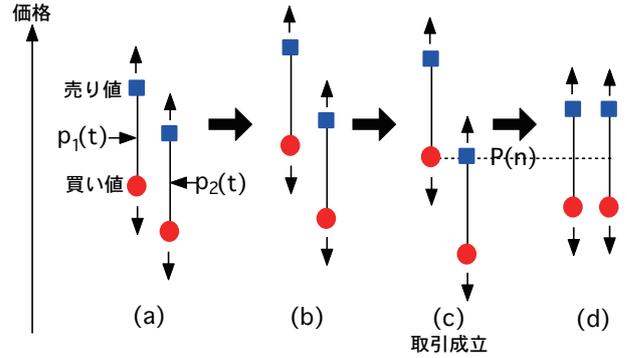


図 2: $N = 2$ のディーラーモデルの時間発展。四角と丸はそれぞれ売り値と買い値を表す。 i 番目のディーラーの価格は売り値と買い値の中間値で与え、 $p_i(t)$ と書き以下のように時間発展する。(a): ディーラーの買い値はもう一人のディーラーの売り値よりも安いために取引は起きない。(b): 各ディーラーの指値はランダムウォークに従って時間発展する。(c): $p_1(t)$ と $p_2(t)$ の距離が L 以上になると取引が発生する。市場価格は $P(n) = \{p_1(t) + p_2(t)\}/2$ で与えられる。(d): 取引が終わった後、2人のディーラーの指値の中間値は市場価格と同じ値に設定され、再び (a) に戻る。

価格差同様に無相関であり大きな値の領域で指数関数に従う。

図.3 の窓グラフのボラティリティーと取引間隔の確率密度関数はモデルを解析的に解くことによって以下のように厳密に求めることができる。

$$Q_1(I) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} c^2 A_{2n-1}^2 e^{-c^2 A_{2n-1}^2 I} \quad (4)$$

$$Q_2(|\Delta P|) = \frac{4}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-\frac{(2n-1)\pi}{L} |\Delta P|}. \quad (5)$$

ここで、 $A_n = \frac{n\pi}{2L}$ である。(4)、(5) 式から I 、 $|\Delta P|$ の大きな領域では和の $n = 1$ の項が支配的になり I 、 $|\Delta P|$ はそれぞれ指数分布に従うことが示される。しかし、現実の取引間隔及びボラティリティーの確率密度関数は指数分布よりもひろい裾野を持つことが経験的に知られており、このモデルの結果はそれらの統計性を満たすことができていないが、取引間隔のフィードバック効果と価格変動のフィードバック効果を基礎モデルに加えると現実の市場を非常に良く再現するモデルを構築することができる。

3.2 ダブルフィードバックディーラーモデル

取引間隔と価格変動のフィードバック効果を加えたダブルフィードバックディーラーモデルは以下のよう

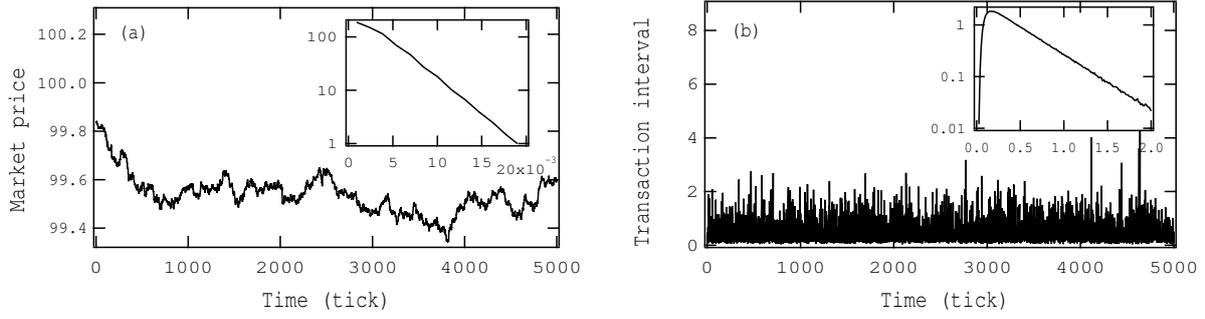


図 3: 基礎ディーラーモデルによる市場価格 (a) と取引間隔 (b) の時系列. 窓グラフはそれぞれ, 価格差と取引間隔の確率密度関数を片対数プロットで表したグラフである. パラメータはそれぞれ以下のように設定した: $L = 0.01$, $c = 0.01$, $\Delta p = 0.01$, $\Delta t = \Delta p \cdot \Delta p$.

に記述される. 詳しい解析に関しては参考文献 [35] に記載されている.

$$p_i(t + \Delta t) = p_i(t) + d(n) \langle \Delta P \rangle_M \{c(n)/c_1\}^2 \Delta t + c(n)f_i(t), \quad (6)$$

$$f_i(t) = \begin{cases} +\Delta p & (\text{prob. } 1/2) \\ -\Delta p & (\text{prob. } 1/2) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

(3) 式の基礎モデルからの変更点は右辺の 2 項目が加わった点と, 右辺 3 項目のノイズの大きさを決めるパラメータ c がティック時間 n に対する依存性を持つようになった点である. そして, 2 項目が価格変動のフィードバック効果を表しており, $c(n)$ が取引間隔のフィードバック効果に対応する. ここで, 2 項目の $\langle \Delta P \rangle_M$ は

$$\langle \Delta P \rangle_M = \frac{2}{M(M+1)} \sum_{k=0}^{M-1} (M-k)\Delta P(n-k). \quad (7)$$

のように記述される過去の価格変動に対する重み付きの移動平均であり, 過去のトレンドを見積もっている. このトレンドに対して, パラメータ $d(n)$ によって, このトレンドを追いかける順張りディーラーになるか, または, この後はトレンドと逆の方向に変動すると予測する, 逆張りディーラーになるかが決まる. また, この戦略を決めるパラメータ $d(n)$ は時間と共に変化しており,

$$d(n+1) = (1 - e_0) \cdot d(n) + \phi(n), \quad (8)$$

$$\phi(n) = \begin{cases} +0.01 & (\text{prob. } 1/2) \\ -0.01 & (\text{prob. } 1/2) \end{cases},$$

と次数 1 の Auto-regressive プロセスで与える. 紙面の関係上詳しく記述することはできないが, このディーラーの戦略の時間発展に対する根拠は, ディーラーモ

デルとポテンシャルモデルの関係 [36] および, ポテンシャルモデルを特徴付けるポテンシャル係数の時間発展が実データ解析から 1 次の Auto-regressive プロセスで良く近似できることにある [39].

次に, 取引間隔のフィードバック効果に対応する $c(n)$ を次のように与える.

$$c(n) = c_1 \sqrt{\frac{\langle I \rangle_{c=c_1}}{\langle I \rangle_\tau}}. \quad (9)$$

ここで, c_1 は正の定数であり, $\langle I \rangle_{c=c_1}$ は $c = c_1$ と設定したときの基礎モデルの取引間隔の平均値である. また, $\langle I \rangle_\tau$ は過去 τ 秒間の取引間隔の平均値であり, $\langle I \rangle_\tau = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} I(n-k)$ で定義される. ここで K は過去 τ 秒間に発生した取引数であり, $I(n)$ は n 番目の取引間隔であり. もし, $I(n) > \tau$ となったときは, $\langle I \rangle_\tau = I(n)$ と設定する. (9) 式は $\langle I \rangle_\tau$ が小さくなると, つまり, 過去の取引間隔が小さくなると, ノイズの大きさを決める $c(n)$ が大きくなり, ディーラーの指値価格 $p_i(t)$ の変化が大きくなり, さらに取引間隔が短くなり, 逆に $\langle I \rangle_\tau$ が大きくなると, $c(n)$ は小さくなり, さらに取引間隔が長くなる傾向生む.

このモデルにおいてパラメータを, $N = 8$, $L = 0.0424$, $M = 1$, $c_1 = 0.01$, $e = 8.0 \times 10^{-4}$, $\tau = 150$, $dp = 0.01$, $dt = dp \cdot dp$ と設定した. また, 取引間隔が 0 に収束したり, 無限大に発散するのを防ぐために, $\langle I \rangle_\tau < 1.5$ の時は $\langle I \rangle_\tau = 1.5$ とし, $\langle I \rangle_\tau > 50$ の時は $\langle I \rangle_\tau = 50$ とする反射壁を設けた. 200000tick のシミュレーションを行った結果の価格変動と取引間隔の時系列の一部を図 4 に示し, 統計性の比較を図 5 に示す. 実データから観測される統計的性質を定性的さらには定量的にまで良く再現できていることが分かる. ここで, 実市場のデータは 2008 年度のデータを 200000tick 分用いた. また, 取引間隔の分布は取引が活発である, ニューヨークの 9:00~10:00 の期間を用いた.

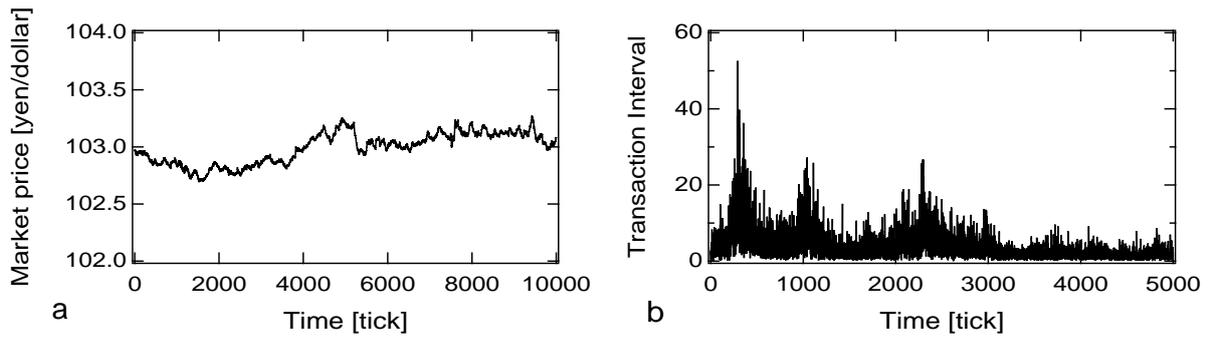


図4: ダブルフィードバックディーラーモデルによるシミュレーション結果. a: 10000tick間の価格変動. b: 5000tick間の取引間隔.

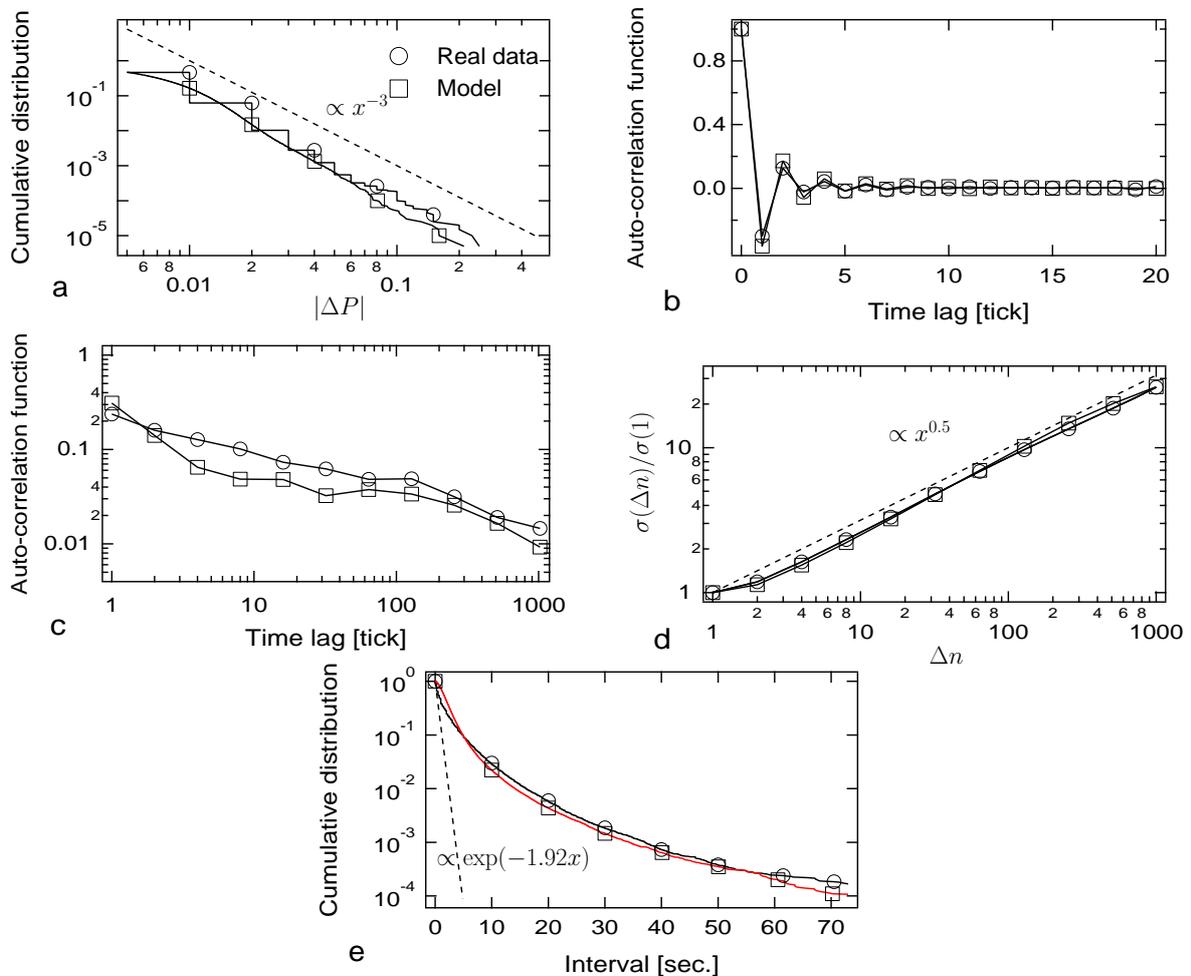


図5: 実市場とダブルフィードバックディーラーモデルの価格変動と取引間隔に対する統計性の比較. a: 価格変動の累積確率, b: 価格差の相関関数, c: ボラティリティーの相関関数, d: 価格の拡散, e: 取引間隔の累積確率

4 ディーラーモデルの応用

市場の統計性をよく再現できるディーラーモデルの応用例として、政府による介入のシミュレーションを行う。ここでは、ディーラーの戦略パラメータ d を時間に対して固定したダブルフィードバックモデルを用いて、介入のシミュレーションを行い、パラメータ d と価格変動の関係を示す。

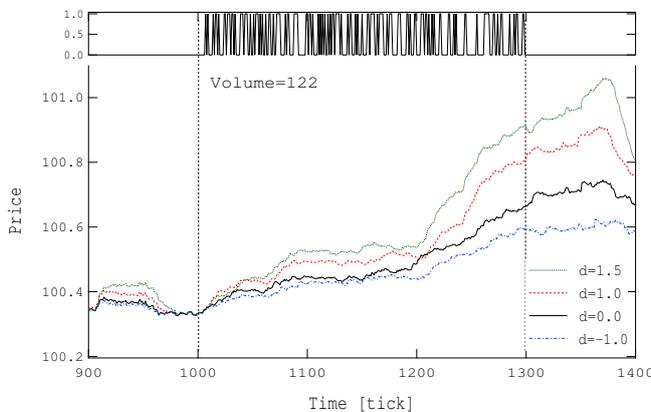


図 6: ダブルフィードバックディーラーモデルによる介入シミュレーションの例。

図. 6 は 1000~1300 ティックの間ポアソンの買い注文の介入を行った場合を想定したシミュレーション結果である。上段のグラフの値が 1 の時、1 本の介入が入ったことを表し、この 300 ティックの間に入ったボリュームは 122 本である。下段の価格変動の時系列はディーラーの先読みの効果 d をそれぞれ変えたときの結果で、 $d > 0$ はディーラーが順張り、 $d < 0$ はディーラーが逆張りであることを意味し、値の絶対値はその強さを表す。この結果から、ディーラーが逆張りの時に買いの介入を行ってもあまり価格は上昇せず、あまり介入の効果は見られないが、順張りの時に介入をすると介入によって生まれる上昇トレンドをディーラーがフォローすることによって効率的に価格が上昇する。一人一人のディーラーがどのような戦略で取引を行っているかということは分からないが、PUCK モデルとディーラーモデルの対応関係から、市場価格の時系列を観測することによって、市場のディーラーの平均的な戦略を定量的に知ることができるので、このシミュレーションと組み合わせることにより効率的な加入方法の提案ができると考えられる。

また、この介入のシミュレーションは、大口注文を受けた銀行が大きな価格変動を生まずに注文を消化したい場合に、注文をどのように分割して、どのようなタイミングで入れればよいかを議論することにも応用が可能である。

5 まとめ

本論分では、初めにモデルの枠組みとなる最も単純な基礎ディーラーモデルを紹介し、モデルの性質を解析的に示した。また、この基礎ディーラーモデルに取引間隔と価格変動のフィードバック効果を加えたダブルフィードバックディーラーモデルが市場の統計性を定性的、定量的に非常に良く再現することを示し、応用として政府による介入のシミュレーションを行った。この様に、経済物理学では誕生してから非常に短い期間で金融市場に対してかなりの精度でモデル化ができるようになってきており、応用にまで手が届くところまできている。また、近年は買い注文や売り注文が市場にどのように入ってきたかが詳細に記録された、板情報の解析も活発に行われており、更なる発展が期待される。

参考文献

- [1] B. Mucklow, Market microstructure: an examination of the effects on intraday event studies, Contemporary Accounting Research, 10(2), Spring, pp.355-382 (1994).
- [2] 宇野 淳, 価格はなぜ動くのか 金融マーケットの謎を解き明かす, 日経 BP 社, 2008
- [3] ジェームス・モンティア, 行動ファイナンスの実践, ダイアモンド社, 2005 James Montier, Behavioural Finance, Wiley, 2002
- [4] K. Izumi and T. Okatsu, "Evolutionary Programming V" (edited by L. J. Fogel, MIT Press, 27-36, 1996.)
- [5] T. Terano, H. Deguchi, K. Kijima, H. Kita, Agent-Based Approaches in Economic and Social Complex Systems (2007).
- [6] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, An Introduction to Econophysics-Correlation and Complexity in Finance-, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [7] J.-P. Bouchaud and M. Potters, Theory of Financial Risks (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [8] 高安秀樹, 高安美佐子, 『エコノフィジックスー市場に潜む物理法則』, 日本経済新聞社, 2001.
- [9] T. Mizuno, S. Kurihara, M. Takayasu and H. Takayasu, Physica A 324, 296-302 (2003).

- [10] R. N. Mantegna and H.E. Stanley, *Nature* 376, 46-48, (1995).
- [11] F. Longin, *Journal of Business* 69, 383, (1996)
- [12] R. Cont, M.Potters, J. -P. Bouchaud, Scaling in stock market data: stable laws and beyond, *Scale Invariance and Beyond (Proceedings of the CNS Workshop on Scale Invariance, Les Houches, March 1997)*. condmat/970587
- [13] A. A. Tsonis, F. Heller, H. Takayasu, K. Marumo and T. Shimizu, *Physica A* 366, 377-386 (2006).
- [14] Misako Takayasu, Takayuki Mizuno, and Hideki Takayasu, Preprint [<http://arxiv.org/abs/physics/0509020>]
- [15] Misako Takayasu, Takayuki Mizuno and Hideki Takayasu, *Physica A* 370, 91-97 (2006).
- [16] M.Takayasu, H.Takayasu, M.P.Okazaki, Proceedings of "Empirical Science of Financial Fluctuations" in Tokyo. (edited by H. Takayasu, Springer, 18-26, 2001)
- [17] M. Takayasu, H. Takayasu, *Physica A* 324, 101-107 (2003).
- [18] S. Maslov, *Physica A* 278, 571-578 (2000).
- [19] M. G. Daniels, J. D. Farmer, L. Gillemot, G. Iori, and E. Smith, *Phys. Rev. Lett.* 90, 108102 (2003) E. Smith, J. D. Farmer, L. Gillemot, and S. Krishnamurthy, *Quant. Finance* 3, 481 (2003).
- [20] J. Maskawa, *Physica A* 382, 172-178 (2007).
- [21] Slanina, F. *Eur. Phys. J. B* 225-240(2008).
- [22] T. Lux and M. Marchesi, *Nature* 397, 498-500 (1999).
- [23] V. Alfi, M. Cristelli, L.Pietronero and A. Zaccaria, *Eur. Phys. J. B* 67, 385 (2009).
- [24] V. Alfi, M. Cristelli, L.Pietronero and A. Zaccaria, *Eur. Phys. J. B* 67, 399 (2009).
- [25] D. Challet, M. Marsili, and R. Zecchina, *Phys. Rev. Lett.* 84,1824 (2000).
- [26] A. De Martino, I. Giardina, A. Tedeschi, and M. Marsili, *Phys. Rev. E* 70, 025104(R) (2004).
- [27] F. Ren, B. Zheng, T. Qiu, S. Trimper, *Phys. Rev. E* 74, 041111 (2006).
- [28] A. Krawiecki, J. A. Hołyst and D. Helbing, *Phys. Rev. Lett.* 89, 158701 (2002).
- [29] T. Kaizoji, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 370, 109-113 (2006).
- [30] W. Zhou and D. Sornette, *Eur. Phys. J. B* 55, 175-181 (2007).
- [31] H. Takayasu, H. Miura, H.Hirabayashi and K.Hamada, *Physica A* 184, 127-134 (1992).
- [32] T. Hirabayashi, H. Takayasu, H. Miura and K.Hamada, *Fractals* 1, 29-37 (1993).
- [33] A. Sato and H. Takayasu, *Physica A* 250, 231-252 (1998).
- [34] K. Yamada, H. Takayasu and M. Takayasu, *Physica A* 382, 340-346 (2007).
- [35] K. Yamada, H. Takayasu and M. Takayasu, *Phys. Rev. E* 79, 051120 (2009).
- [36] K. Yamada, H. Takayasu, M. Takayasu *Eur. Phys. J. B* 63, 529-532 (2008).
- [37] H. Takayasu, A.-H. Sato and M. Takayasu, *Phys. Rev. Lett.* 79 966-969 (1997).
- [38] K. Yamada, H. Takayasu and M. Takayasu, *Journal of Physics: Conference Series* 221 012015 (2010).
- [39] M. Takayasu, K. Watanabe, T. Mizuno and H. Takayasu, Proceedings of "Econophysics Approaches to Large-Scale Business Data and Financial Crisis", (edited by H. Takayasu et al., Springer, 79-98, 2010)