

銘柄間相互相関に基づく金融危機の可視化と予測

Visualization and prediction of financial crisis by stock correlations

伊吹 勇郎 日向野 隼輔 井上 純一*
Takero Ibuki Shunsuke Higano Jun-ichi Inoue

北海道大学 大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University

Abstract: We attempt to visualize the collective behaviour of markets at financial crisis through cross-correlations between typical Japanese stocks by making use of multi-dimensional scaling. Then, we make a clustering of the scattered plots by minimizing the energy function of the so-called *Potts spin-glasses* having pair-wise interactions between spins (stocks) as correlation coefficients in stocks. We also propose a theoretical framework to predict several time-series simultaneously by using cross-correlations in financial markets. Our model system is basically described by a variant of the *Ising model* introduced by Kaizouji (2000). The justification and validity of our approaches are numerically examined for Japanese NIKKEI stocks around 11 March 2011, and for foreign currency exchange rates around Greek crisis in spring 2010.

1 はじめに

昨年3月11日の東日本大地震は、多くの犠牲者を出すとともに、様々な社会システムへ多大な影響を与えた。この大震災は被災地の人々の生活を一変してしまっただけではなく、既存システムの脆弱性を明らかにした。

ここで今一度、冷静にこうした状況 — 各種インフラや津波に対する避難経路を含めたマニュアルの不整備等 — を再考してみると、既存の社会システムは(少なくとも「平時」においては)、人々がある程度「合理的な」意思決定を行い、「合理的な」行動をとることを前提として設計/構築されていることがわかる。しかし、大震災や金融危機などの極めて「クリティカルな」状況においては「人々が冷静かつ合理的に行動する」という、この前提そのものが成り立たない可能性もある。

例えば、平時の金融市場において、トレーダは過去の値動きや利用可能な客観的データを参照した「テクニカル分析」に基づいて自らの「売り」「買い」判断を行う。しかし、大震災や金融危機に直面した場合でさえもなお、彼らが客観的データに基づいた「合理的な」意思決定を行い得るか、に関しては疑問の余地があり、そうした非常時には合理的判断よりむしろ「周り」や「場の雰囲気」に流された「非合理的な」意思決定をしてしまう傾向が顕著になるのでは、という予想もできる。

事実、今回の震災後、金融市場はすばやく反応し、北関東から東北地方にかけて工場や支社などを多く持つ

企業を中心に、先行きに関する不安が生まれ、トレーダ(投資家)による売り注文が重なり、日経平均株価 [1] はこの日を前後にして急激に下落した。所謂「プロスペクト理論」に基づく行動経済学においては、既にこのような「非合理的意思決定」を前提にして経済活動を再考察する試みがなされてきている(例えば、[2]を参照)。

従って、危機に直面した際の「ミクロな」社会的エージェント群の非合理的意思決定の結果生じる「マクロな」現象に着目し、可能ならばそのプロセスを可視化し、結果を将来への知見として蓄積していくことで、それら実データを利用したシステムの設計/リスク評価法の再構築を検討することは重要であり、この震災を経験した我が国の研究者にとって責務であるとも言えよう。

通常、社会的エージェントには「個性」があり、彼/彼女独自の合理的戦略に基づいた意思決定を行うと考えられる。従って、それら「個性」を完全に捨象し、単純な「粒子群」として扱う数理モデリングには自ずと限界がある。しかし、大震災などによる危機に直面した場合には、「粒子」に似て「没个性的」となった彼らの「集団行動」に基づくシステムの普遍的性質がマクロに創発することが予想される。これは同時に、クリティカルな状況における社会的エージェント群の振る舞いに関し、何らかの一般理論が構築できる可能性を示唆する。

そこで、本研究ではこうした社会システムの中から金融市場を取り上げ、危機前後での複数銘柄間の相互相関を可視化し、また、その局所的相互相関情報を用いることで複数銘柄価格を同時に予測する方法を提案する。

*連絡先: 北海道大学 大学院情報科学研究科
〒060-0814 札幌市 北区 北14条 西9丁目
E-mail: jinoue@cb4.so-net.ne.jp

2 二体相互相関係数

本稿では株式市場における各銘柄の価格間相関の強さを測る指標として、画像解析等でも用いられる相関係数を採用する。この係数を計算するため、銘柄 i の時刻 t における株価実測値 $q_i(t) (\geq 0)$ に対し、対数尺度で測ったこの銘柄価格の「リターン (変動幅)」を $r_i^{(t)} \equiv \log\{q_i(t)/q_i(t-1)\}$ で定義する。このとき、銘柄 i の時間窓幅 M にわたる移動平均 $\overline{r_i^{(t)}} \equiv \frac{1}{M} \sum_{l=t-M+1}^t r_i^{(l)}$ 、銘柄 i, j 間の二体相互相関 $\overline{r_i^{(t)} r_j^{(t)}} \equiv \frac{1}{M} \sum_{l=t-M+1}^t r_i^{(l)} r_j^{(l)}$ に対し、銘柄 i, j 間の相関係数を

$$\rho_{ij}^{(t)} = \frac{\overline{r_i^{(t)} r_j^{(t)}} - \overline{r_i^{(t)}} \overline{r_j^{(t)}}}{\sqrt{[(\overline{r_i^{(t)}})^2 - (\overline{r_i^{(t)}})^2][(\overline{r_j^{(t)}})^2 - (\overline{r_j^{(t)}})^2]}} \quad (1)$$

に従って算出する。この相関係数は $-1 \leq \rho_{ij}^{(t)} \leq 1$ を満たすことに注意する [3, 4]¹。従って、この相関係数は距離の公理を満たさないが、変換: $d_{ij}^{(t)} = \sqrt{(1 - \rho_{ij}^{(t)})/2}$ の下で $d_{ij}^{(t)}$ は $0 \leq d_{ij}^{(t)} \leq 1$ を満たし、確かに「距離の公理」($d_{ij}^{(t)} \geq 0, d_{ij}^{(t)} = 0$ ならば $i = j, d_{ij}^{(t)} = d_{ji}^{(t)}, d_{ij}^{(t)} + d_{jk}^{(t)} \geq d_{ik}^{(t)}$) を満足する。これが次節で述べる計量多次元尺度構成法への「入力データ」となる。

3 計量多次元尺度構成法

本節ではデータ可視化技術として重要な計量 MDS について簡単に説明する (詳細は例えば, [5] 参照)。具体的には以下の手続きにより計量 MDS を構成する。まずは、 P 次元のベクトルで株価 i の「 P 次元空間内での位置」を表すことにし、 $\mathbf{X}_i \equiv (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iP})$, $i = 1, \dots, N$ と置く。 i は銘柄価格のインデックスである。このとき、銘柄 i, j 間の距離をユークリッド距離として $d_{ij} = \sqrt{\sum_{m=1}^P (x_{im} - x_{jm})^2}$ で定義しておこう。このとき、2 つの銘柄ベクトルの内積 $z_{ij} \equiv \sum_{m=1}^P x_{im} x_{jm}$ は N 点の重心を起点にして $z_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_{ij}^2 + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N d_{ij}^2 - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{ij}^2 - d_{ij}^2)$ のように距離 d_{ij} の関数として与えられる。よって、ここでの問題は次のエネルギー関数: $E = \sum_i \sum_j \left(z_{ij} - \sum_{m=1}^P x_{im} x_{jm} \right)^2$ を \mathbf{X}_i ; $i = 1, \dots, N$ に対して最小化する「最適化問題」として定式化できる。この最適化問題の解は $N \times N$ 対称行列 $\mathbf{Z} \equiv \{z_{ij} | i, j = 1, \dots, N\}$ と、 \mathbf{X} を縦に並べた $P \times N$ 行列 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N)^T$ に対して $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \mathbf{X}^T$ で与えられる。このとき、 \mathbf{Z} は実対称行列なので $\mathbf{Z} \mathbf{y}_k = \lambda_k \mathbf{y}_k$, $k = 1, \dots, N$ を満たす \mathbf{Z} の固有

¹文献 [3, 4] では、この距離から「最小全域木 (minimum spanning tree)」を求め、それに基づきクラスターを可視化している。その点で本研究のアプローチとは異なることを付言しておく。

ベクトル \mathbf{y} に対し、 $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Y}^T$ なるエッカート・ヤング分解が可能である。ここに、 $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N)^T$ であり、 $\mathbf{\Lambda}$ は \mathbf{Z} の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ の順番に対角成分に並べた行列である。従って、直ちに $\mathbf{X} = \mathbf{Y} \mathbf{\Lambda}^{1/2}$ が求める最適化問題の解となる。

3.1 震災前後の日経株価データによる検証

ここでは上述の計量 MDS を具体的な株式データに当てはめてみる。ここで扱うデータとしては「Yahoo! ファイナンス」[1] から入手したものをを用いる。具体的には「TOPIX Core30」と呼ばれる代表的 30 銘柄² を含む東証上場企業からもいくつかの銘柄株をランダムに 200 銘柄取り込んだ「混合データ」を可視化した結果を図 1 に載せる。窓幅 M は 1 週間 ($M = 7$) に選んだ³。この図より、明らかに震災直後の 3/11 に広く散布していた点群が 3/15 には限定された領域に収縮し、各業種毎にそれぞれ固まった非自明な形状をとることがわかる。これらクラスターの形状は明らかに平時の散布図と異なるものである。

これらクラスターの特定、および、各クラスターサイズの変化をより定量的にみるため、次節では計量 MDS によって得られた二次元散布図の混合正規分布による当てはめ、および、ポッツ・スピングラス模型を用いた散布点群のクラスターリングを行う。

4 散布点群のクラスターリング

本節では、前節において計量 MDS によって得られたデータからの散布図の各点を複数のクラスへ分類する。

4.1 混合正規分布の当てはめ

まずは散布点群を二次元混合正規分布で近似することを試みる。 K 個の成分からなる混合分布の各々を $\mathcal{N}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}^{(k)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(k)})$, $k = 1, \dots, K$ の正規分布で与えるものとする。ここに、 $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ は平均値、 $\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}$ は分散共分散行列である。ベクトル \mathbf{x} は MDS によってプロットされる N 個の二次元平面内の座標点であり、 $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)^T$; $i = 1, \dots, N$ である。従って、混合正規分布は $p(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}^{(k)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(k)})$ と書ける。ここに、 π_k は混合比であり、規格化条件 $\sum_{k=1}^K \pi_k = 1$ を満たす

²TOPIX Core30 とは、TOPIX ニュー・インデックス・シリーズの一つで、東京証券取引所の市場第一部全銘柄のうち「時価総額」「流動性」の特に高い 30 銘柄で構成された株価指数である。

³理論的には窓幅を各銘柄の自己相関関数の緩和時間 (の最大値) 程度にとるのが自然かもしれないが、ここでは試験的に 1 週間 ($M = 7$) にとった。

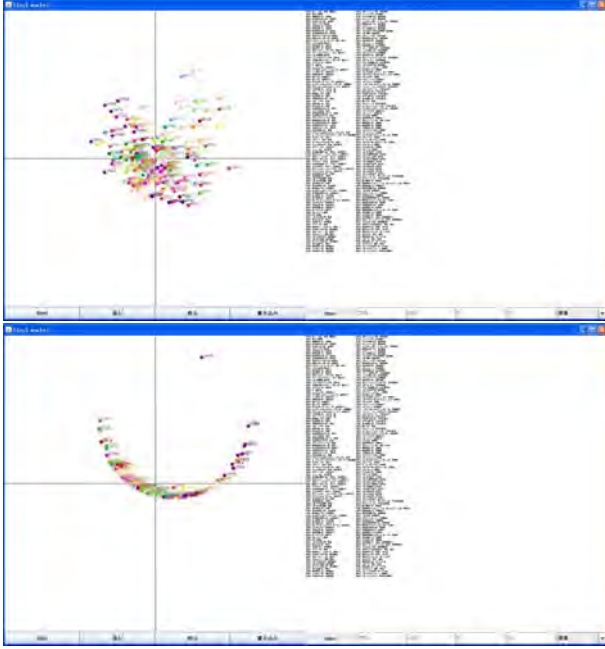


図 1: 2000 年から東証に上場している企業からランダムに 200 銘柄選択したデータに、日経平均株価終値を含めた「混合データ」を計量 MDS に基づいて可視化した結果。時間窓幅は $M=7$ とした。2011 年 3/11(上), 15(下) の結果。各点の「色」は各「業種」。

ことに注意されたい。このとき、 N 個の独立なデータ点集合: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ に関する尤度関数は

$$L(\boldsymbol{\pi}, \{\boldsymbol{\mu}\}, \{\boldsymbol{\Sigma}\}) \equiv \log \prod_{i=1}^N p(\mathbf{x}_i) \quad (2)$$

で与えられる。簡単のため、 $\boldsymbol{\pi} \equiv (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_K)$, $\{\boldsymbol{\mu}\} \equiv (\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{\mu}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\mu}^{(K)})$, $\{\boldsymbol{\Sigma}\} \equiv (\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\Sigma}^{(K)})$ と定義したことに注意しよう。

4.1.1 EM アルゴリズム

次の Q 関数計算を「E ステップ」として尤度関数を間接的に最大化する EM アルゴリズムを構成する⁴。

$$Q(\{\boldsymbol{\mu}\}, \{\boldsymbol{\Sigma}\} | \{\boldsymbol{\mu}_t\}, \{\boldsymbol{\Sigma}_t\}) = \sum_{\mathbf{x}} \frac{\sum_k \mathcal{N}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}_t^{(k)}, \boldsymbol{\Sigma}_t^{(k)}) \log \mathcal{N}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}^{(k)}, \boldsymbol{\Sigma}^{(k)})}{\sum_k \mathcal{N}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}_t^{(k)}, \boldsymbol{\Sigma}_t^{(k)})} \quad (3)$$

このとき「M ステップ」は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}_{t+1}^{(k)} &= \arg \max_{\boldsymbol{\mu}^{(k)}} Q(\{\boldsymbol{\mu}\}, \{\boldsymbol{\Sigma}\} | \{\boldsymbol{\mu}_t\}, \{\boldsymbol{\Sigma}_t\}) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{t+1}^{(k)} &= \arg \max_{\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}} Q(\{\boldsymbol{\mu}\}, \{\boldsymbol{\Sigma}\} | \{\boldsymbol{\mu}_t\}, \{\boldsymbol{\Sigma}_t\}) \end{cases} \quad (4)$$

⁴EM アルゴリズムに関するより基本的説明を必要とする読者は、例えば文献 [6] 参照。

ここで、「E」「M」ステップの定常解を $\boldsymbol{\mu}^{(k)*}, \boldsymbol{\Sigma}^{(k)*}$ とすれば、銘柄 \mathbf{x} の属するクラスは $C(\mathbf{x}) = \arg \max_k g_k(\mathbf{x})$, $g_k(\mathbf{x}) \equiv \frac{\mathcal{N}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}^{(k)*}, \boldsymbol{\Sigma}^{(k)*})}{\sum_k \mathcal{N}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}^{(k)*}, \boldsymbol{\Sigma}^{(k)*})}$ で判別されることになる。

4.1.2 混合分布の成分数と赤池情報量規準

混合分布を構成する成分数を決定するため、ここでは赤池情報量規準 (AIC) を用いる。この情報量基準は混合数 K の関数として $AIC = (-2)\{L(\boldsymbol{\pi}^*, \{\boldsymbol{\mu}\}^*, \{\boldsymbol{\Sigma}\}^*) - (\text{モデルのパラメータ数})\}$, すなわち

$$AIC = -2L(\boldsymbol{\pi}^*, \{\boldsymbol{\mu}\}^*, \{\boldsymbol{\Sigma}\}^*) + 12K - 2 \quad (5)$$

で与えられる。従って、 $K = 1, 2, \dots, K_{\max}$ で AIC を計算し、最小値をとる K の値が適切な成分数となる。

4.2 ポッツ模型を用いたクラスタリング

磁性体の数理モデルの一種である「ポッツ模型」を用いると、クラスタ数の決定、および、クラスタリングを同時に行うことができる [7]。

まず、銘柄 i の属するクラス番号を S_i で表し、 S_i は 0 から $Q-1$ までの Q 状態の整数値をとるものとする。つまり、例えば $S_i = 2$ ならば「銘柄 i は 3 番目のクラスに属する」と考える。このとき、銘柄 i, j 間の相互作用を J_{ij} とし、 J_{ij} を相関係数 $\rho_{ij}^{(t)}$ に選ぶ。ここに $-1 \leq J_{ij} = \rho_{ij}^{(t)} \leq 1$ となることに注意する。これら $N(N-1)/2$ 個からなる $J_{ij} = \rho_{ij}^{(t)}$ のセット $\{J_{ij}\}$ が与えられたとき、 N 個の銘柄それぞれがどのクラスに属するかを決めるためには、次のエネルギー関数を最小化する配列 $\mathbf{S} = (S_1, S_2, \dots, S_N)$ を選べば良い。

$$E(\mathbf{S}) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N J_{ij} \delta_{S_i, S_j} \quad (6)$$

このエネルギー関数で説明される磁性体の数理モデルをポッツ・スピングラス模型 (Potts spin-glass model) と呼ぶ。 δ はクロネッカのデルタである。

つまり、負の相関係数で相互作用が与えられる $J_{ij} > 0$ のペア i, j は同じクラスに属するほうがエネルギーを低くし、逆に $J_{ij} < 0$ のペア i, j は異なるクラスに属するほうがエネルギーは下がる。従って、本研究で採用するシミュレーテッド・アニーリング等の数値計算ツールで最適化を行った結果、 $N = 5$ 銘柄に対し $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5) = (0, 0, 1, 1, 2)$ なる結果が得られた場合、このデータの説明には $K = 3$ クラス必要であり、1 番目のクラスのメンバは (S_1, S_2) , 2 番目のクラスのメンバは (S_3, S_4) , 残りは S_5 となる。

5 計算機実験

ここでは、上記の理論的フレームワークにおいていくつかの実データに対して数値実験を行う。

5.1 EM アルゴリズム

EM アルゴリズムを用いたクラスタリング結果を図2に載せる。クラッシュ前は3つのクラスタ、クラッシュ後の結果は3つ以上のクラスタの存在を示唆するが、非自明な「半円集合」がマーケット・モード、この周りに散見される残り数点は平時よりマーケット・モードとは独立に動く「ノイズ」とみなすことができる。

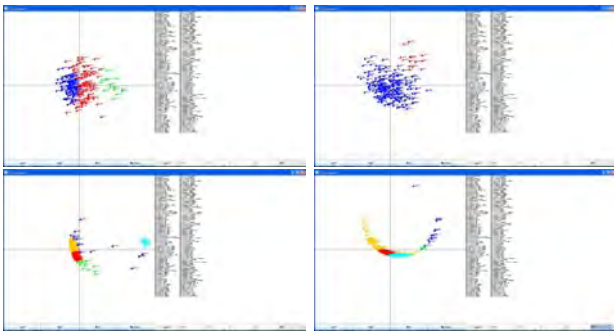


図 2: EM アルゴリズムを用いた場合のクラスタリング結果。左上から右下にかけて 2011 年 3/10, 11, 14 および 3/15 の結果。用いたデータは図 1 で選択したものと同一。

5.1.1 危機前後の赤池情報量規準

危機前後の AIC の振る舞いを図3に載せる。この図より、危機において AIC は最小値をとることがわかる。この結果より、AIC の最小性が危機の特徴をマクロに捉える物理量の一つと考えることができる。



図 3: 東日本大震災前後で算出された赤池情報量規準の振る舞い。

5.2 ポッツ・スピングラス模型

ポッツ・スピングラス模型を用いたクラスタリング結果を図4に載せる。クラッシュ前は複数クラスタ、クラッシュ後の結果は1つのクラスタを認識する。本手法では全てのスピン間の結合を考慮したため、二次元面内での幾何学的構造が取り込めていない。スピン間相互作用レンジの適切な設定は今後の課題である。

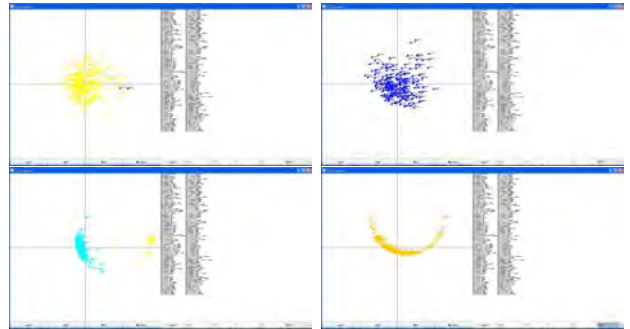


図 4: ポッツ・スピングラス模型を用いた場合のクラスタリング結果。左上から右下にかけて 2011 年 3/10, 11, 14 および 3/15 の結果。用いたデータは図 1 で選択したものと同一。

6 イジングスピン系と予測モデル

金融商品の価格時系列を予測する試みは古くから数々提案されており、AR モデルやそれらの拡張である ARCH や GARCH モデル [8], あるいはカルマンフィルタ等 [9] の伝統的時系列予測アルゴリズムの他、最近では物理学をその基礎とした予測手法 [10, 11] も提案されている。そこで、この節からは海蔵寺の模型 [12] を複数銘柄間の相互相関を用いて拡張することにより、複数銘柄価格を同時予測する方法を提案する。我々の手法は平均場イジング模型の一つである「層状結合した時間依存磁場中の伏見-テムパリ模型」で記述される。

6.1 価格のダイナミクス

金融市場において、ある特定の一銘柄に着目し、その時刻 t での価格を p_t と書こう。この単位時間ステップ後の時間変化 $p_{t+1} - p_t$ は次式で与えられる。

$$p_{t+1} - p_t = \delta_t \equiv \delta_t(\{t-1\}_M) \quad (7)$$

ここに、 $\delta_t(\{t-1\}_M)$ はリターンが時刻 $t-1, t, \dots, t-M+1$ の過去 M ステップ以前までの市場履歴の関数であることを陽に示すために記した (以下では省略する)。リターン δ_t は時間依存するマクロ変数であるが、市場に参加する個々のトレーダのミクロな意思決定の結果得られる物理量であることに注意する。

6.2 マクロ変数のミクロな構築

個々のトレーダ $i = 1, \dots, N$ は利用可能な情報や個々の経験に基づき、時刻 t において、量 v_{it} だけの金融商品を取引き(売り/買い)する。そこで「買い」グループを $\mathcal{A}_+^{(t)}$ 、「売り」グループを $\mathcal{A}_-^{(t)}$ で定義すると、市場で売られた/買われた総価格はそれぞれ $\psi_+^{(t)} \equiv \sum_{i \in \mathcal{A}_+^{(t)}} v_{it}$, $\psi_-^{(t)} \equiv \sum_{i \in \mathcal{A}_-^{(t)}} v_{it}$ で与えられる。従って、時刻 t で「買い超過」 $\psi_+^{(t)} > \psi_-^{(t)}$ であれば、次の時刻で商品は値上がりし、逆に「売り超過」 $\psi_+^{(t)} < \psi_-^{(t)}$ であれば価格は下がると考えるのが自然であろう。そこで、(7)式のリターンを比例係数を λ として $\delta_t = \lambda(\psi_+^{(t)} - \psi_-^{(t)})$ と書く。個々のトレーダのミクロな意思決定とリターン δ_t を結びつけることが、以下での問題である。

6.3 時間依存磁場中の伏見-テムパリ模型

各トレーダ $i = 1, \dots, N$ の「買い」「売り」の意思決定をイジング・スピン:

$$S_i^{(t)} = \begin{cases} +1 & \text{「金融商品を買う」} \\ -1 & \text{「金融商品を売る」} \end{cases} \quad (8)$$

で区別する。この変数を導入することで、リターンを

$$\delta_t = \lambda(\psi_+^{(t)} - \psi_-^{(t)}) = \lambda \sum_{i=1}^N v_{it} S_i^{(t)} \quad (9)$$

と書くことができることに注意する。以下では簡単のため、各トレーダの取引 quantity は時刻に依らず一定 $v_{it} = 1 (\forall i, t)$ とし、価格の変動幅が $[-1, 1]$ の間に収まるよう、スケール・パラメータを $\lambda = N^{-1}$ とおく。このとき、リターンは $\delta_t = (1/N) \sum_{i=1}^N S_i^{(t)}$ としてシステムの「磁化」で書けることになる。

次に、海蔵寺 [12] に倣って、トレーダはある種の確率的意思決定を行うものとし、金融市場のエネルギー関数を次式で定義する。

$$E(\mathbf{S}) = -\frac{1}{z} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} S_i S_j - \sum_{i=1}^N h_i \sigma_\tau^{(t)} S_i \quad (10)$$

ここに、右辺第 1 項の $J_{ij} \in \mathbb{R}$ はトレーダ群からなるコミュニティの「重み付き隣接行列」であり、 z はこのネットワークの「平均次数」である。この第 1 項はいわゆる「ケインズのビューティ・コンテスト」[13]の効果を表し、周りのトレーダが「売り」に走ると自分も「売り」に動く、といった類いの「協調行動」の効果を表す。このように、トレーダが周りにつられて協調行動をとり始める現象を行動経済学では「ハーディング現象」「インフォメーション・カスケード」と呼んでいるが [2]、ここでみるように、その現象はエネルギー関数

(10) で記述される「イジング模型」で再現することができ、統計力学の知見を用いると、トレーダ(要素)間の相互作用に基づく「協力現象」として、部分的にはあるが説明することができる。

ここでトレーダ自身の「周辺」をどのように定義するか、は重み付き隣接行列 J_{ij} の選び方に依存するが、ここでは全トレーダが同じ強さで互いに結合するものとする⁵。つまり、 $J_{ij} = J > 0 (\forall i, j), z = N$ である。一方、第 2 項は過去数 τ ステップの市場情報に対する「トレーダの反応」を表す効果であり、例えば、全てのトレーダがそのような情報を利用し ($h_i > 0 \forall i$)。もし、特定のトレーダ i がそのような情報を利用しなければ ($h_i = 0$)、利用可能な市場情報としてトレンド:

$$\sigma_\tau^{(t)} = \frac{p_t - p_{t-\tau}}{\tau} \quad (11)$$

を選べば、これが「買い」($\sigma_\tau^{(t)} > 0$) に傾いていれば、全てのトレーダが「買い」($S_i = 1$) に動くことでエネルギー関数が減少する。ここでは簡単のため、全てのトレーダが同じ重みで市場情報を利用する ($h_i = h \forall i$) と考える⁶。従って、 J, h の大きさを適切に決定した後、エネルギー関数 (10) の最小エネルギー解 \mathbf{S} が金融市場の典型的状態を表すことになる。

このとき、(10) 式で与えられるエネルギー関数:

$$E(\mathbf{S}) = -\frac{J}{N} \sum_{i,j=1}^N S_i S_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_\tau^{(t)} S_i \quad (12)$$

はトレンド $\sigma_\tau^{(t)}$ を各イジング・スピンに作用する、時間依存性をもつ「一様磁場」とみなせば、(12) 式は時間依存磁場中の**伏見-テムパリ模型**となる⁷。

6.4 多様性最大化原理とギブス分布

エネルギー関数 (12) を最小化するベクトル: $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_N)$ は多くの場合「唯一」であるが、実際のトレーダ群の意思決定は「多様性」を持つべきである。そこで、トレーダの意思決定ベクトル \mathbf{S} の「アンサンブル」を考え、その分布を $P(\mathbf{S})$ とし、確率分布の規格化: $\sum_{\mathbf{S}} P(\mathbf{S}) = 1$, エネルギー期待値一定: $\sum_{\mathbf{S}} P(\mathbf{S}) E(\mathbf{S}) = E$ のもとで多様性指標である情報論的エントロピー: $H = -\sum_{\mathbf{S}} P(\mathbf{S}) \log P(\mathbf{S})$ を最大化する分布を考えると、それは次の**ギブス分布**となる。

$$P(\mathbf{S}) = \frac{\exp[-\beta E(\mathbf{S})]}{\sum_{\mathbf{S}} \exp[-\beta E(\mathbf{S})]} \quad (13)$$

⁵ トレーダ間の相互相関 J_{ij} が平均ゼロの正規分布で与えられると「Sherrington-Kirkpatrick スピングラス」となる。

⁶ 各トレーダがまちまちな重みで市場履歴を考慮する場合には「ランダム磁場イジング模型」となる。

⁷ 利用可能な市場情報 σ_τ としては、(11) 式で定義される「トレンド」に限らず、例えば長期もの国債の価格予測に対しては「金利」の変動情報を用いても良い。

ここで、 β はシステムの「逆温度」であり (温度を T として $\beta = 1/T$), 以下では簡単のため $\beta = 1$ とおく. また, ベクトルに関する和の定義は $\sum_{\mathbf{S}}(\cdots) = \sum_{S_1=\pm 1} \cdots \sum_{S_N=\pm 1}(\cdots)$ であることに注意されたい.

6.5 ベイズ統計に基づく定式化

(13) 式で与えられるギブス分布 $P(\mathbf{S})$ をベイズ統計の「事後確率」として導出することもできる. まず, 各トレーダ i が自らの意思決定 $S_i = \pm 1$ を行った後, 市場において保有株の価格が σ_τ だけ「値上がり」あるいは「値下がり」したと考える. このとき, その意思決定による「報酬」は $\sigma_\tau S_i$ で測ることができる. つまり, この値が「正」で大きければトレーダ i の報酬は大きく (「負」で大きければ「損失」が大きい), 逆に「正」で小さければ報酬は小さい. 従って, 次の条件付き確率:

$$P(\sigma_\tau | \mathbf{S}) \propto \exp\left(h \sum_{i=1}^N \sigma_\tau S_i\right) \quad (14)$$

はトレーダ群の意思決定による「原因」 \mathbf{S} に対する「結果」 σ_τ を与える「尤度」と解釈することができる. 我々がここで必要なのは, 意思決定の「結果」 σ_τ が与えられた際の「原因 (予測)」 \mathbf{S} であるから, $Q(\mathbf{S})$ を事前確率としたベイズの公式から

$$P(\mathbf{S} | \sigma_\tau) \propto P(\sigma_\tau | \mathbf{S}) Q(\mathbf{S}) \quad (15)$$

が得られる. 事前確率は「トレーダは兎角周りに流されて意思決定しやすい」という「ケインズのビューティ・コンテスト」効果を反映させて

$$Q(\mathbf{S}) \propto \exp\left(\frac{J}{N} \sum_{ij} S_i S_j\right) \quad (16)$$

と選ぶことができる. (14)(16) 式を (15) 式に代入し

$$P(\mathbf{S} | \sigma_\tau) = \frac{\exp\left(\frac{J}{N} \sum_{ij} S_i S_j + h \sum_i \sigma_\tau S_i\right)}{\sum_{\mathbf{S}} \exp\left(\frac{J}{N} \sum_{ij} S_i S_j + h \sum_i \sigma_\tau S_i\right)} \quad (17)$$

が事後確率となるが, これは (13) 式の $P(\mathbf{S})$ を与える.

7 リターンと磁化の平均場方程式

リターンを与える (9) 式をミクロに構築することが我々の当面の目標であったが, 与えられた市場情報 $\sigma_\tau = \sigma_\tau^{(t)}$ のもとで, $\mathbf{S}^{(t)} = (S_1^{(t)}, \dots, S_N^{(t)})$ の確率過程が「エルゴード的」であれば, 時間間隔 $M (< \infty)$ に渡る物理量 B_t の移動平均を $\bar{B}_t = \frac{1}{M} \sum_{i=t-M+1}^t B_i$ と定義すると, リターンの移動平均は

$$\bar{\delta}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^{(t)} \simeq \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{S}} P(\mathbf{S}) \sum_{i=1}^N S_i \equiv m \quad (18)$$

と, 近似的に一様磁場中の伏見-テムパリ模型における磁化 m で書ける. この模型の場合, 磁化 m が厳密に計算できて, 与えられた「システム・パラメータ」 J, h と「入力データ」 σ_τ のもとで, 次の状態方程式 (平均場方程式):

$$m = \tanh(Jm + h\sigma_\tau) \quad (19)$$

の解として与えられる.

7.1 システム緩和と磁化の更新式

前節までで, リターンの移動平均値をアンサンブル平均値で置き直す際, その値がシステムの「磁化」を用いて書けることをみてきた. しかし, この取り扱いはやはり「近似」であり, 価格の更新式 (7) に現れるリターンが「平衡状態」の磁化で置き換え可能か否かは議論の余地がある. そこで, ここでは, 状態方程式の解としての磁化をリターンとするのではなく, 平衡状態へ至る磁化の時間発展:

$$m_{t+1} = \tanh(J_t m_t + h_t \sigma_\tau^{(t)}) \quad (20)$$

で各時刻のリターン $\bar{\delta}_t$ ($t = 1, 2, \dots$) を置き換える. ここで, パラメータ J_t, h_t は価格推定を試みる期間において一定値をとる, 市場をマクロに特徴つけるシステム・パラメータである. 通常, 状態方程式 (19) の反復数値解法で行うように, (20) 式を適切な初期値から十分繰り返すことで, その収束点が (19) の解となる. ここでは, その手続きを「1ステップ」だけ実行することで, 区間 $M (< \infty)$ での時間平均が実現されると考える⁸. このとき, 価格の予測式は

$$p_{t+1} = p_t + m_t \quad (21)$$

で陽に与えられる.

8 相互相関と複数銘柄同時予測

前節までの議論では, 単一銘柄の市場履歴のみを情報として利用した. しかし, 既に見たように, 現実には東日本大震災を引き金とした東証株価のクラッシュにおいては, 多くの異なる銘柄株価は「協調した」値動きをする. 従って, これらの「銘柄間相互相関」の情報を予測に役立てることはできないか, ここで検討することは十分に意義あることであろう. 実際の金融取引においても, 「同業種」「異業種」に関わらず, 保有銘柄に関連する複数銘柄の値動きの「関係性」に着目した意思決定を行うことは極めて合理的であるように思われる.

⁸この伏見-テムパリ模型では, マルコフ連鎖モンテカルロ法による平衡状態への緩和が「時間依存ギンツブルグ-ランダウ方程式」 $\frac{dm}{dt} = -m + \tanh(Jm + h\sigma_\tau^{(t)})$ で書ける. この微分方程式のオイラー差分による数値解を用いることもできる.

そこで、ここでは利用可能な株価情報が K 銘柄分あるとして (21) 式、エネルギー関数を次式で修正する。

$$p_{t+1}^{(k)} = p_t^{(k)} + m_t^{(k)}, \quad k = 1, \dots, K \quad (22)$$

$$E_k(\mathbf{S}^{(k)}) = -\frac{J_t^{(k)}}{N} \sum_{ij} S_i^{(k)} S_j^{(k)} - h_t^{(k)} \sum_i \sigma_\tau^{(k,t)} S_i^{(k)} - \gamma_t^{(k)} \sum_i \left(\frac{1}{K} \sum_{\mu=1}^K c_{k\mu}^{(t-1)} m_{t-1}^{(\mu)} \right) S_i^{(k)} \quad (23)$$

ここに、 $\mathbf{c}^{(t-1)} = \{c_{k\mu}^{(t-1)}\}$ はサイズが $(K \times K)$ の対称行列である。前節までの推定方式との違いはエネルギー関数右辺の第 3 項であり、特定の「第 k 銘柄」以外の株価の直近時刻のリターンに関する効果を表している。

8.1 局所的相互相関情報の利用

そこで「ある銘柄が値上がりすれば、逆に価格が下がる銘柄もある」という局所的な相互相関情報を利用することを考えよう。つまり、相関行列 $\mathbf{c}^{(t)}$ の成分を銘柄間の相関係数: $c_{k\mu}^{(t)} = \rho_{k\mu}^{(t)}$ に選ぶ。ここで、もし、銘柄 a, b 価格が無相関な場合、 $c_{ab}^{(t)} = 0$ ($\forall t$) であるから、銘柄 a の株価予測において銘柄 b からの効果は一切効かない。逆に、ある時刻 t で計算された相関係数が $c_{ab}^{(t)} \simeq 1$ となり、 t の直近 M 区間で銘柄 a, b が非常に強い相関を持つのであれば、次時刻 $t+1$ 銘柄 a, b の予測値は互いに同じ値に近づこうとする。従って、エネルギー関数 (23) は K 層からなる時間依存磁場中の伏見-テムパリ模型において、各層間のスピンのそれぞれ相互相関を伴った平均場 $c_{k\mu}^{(t-1)} m_{t-1}^{(\mu)}$ で結合している「層状イジング模型」を表す⁹。以上により、予測方程式は $k = 1, \dots, K$ に対して

$$p_{t+1}^{(k)} = p_t^{(k)} + m_t^{(k)} \quad (24)$$

$$m_t^{(k)} = \tanh \left(J_t^{(k)} m_{t-1}^{(k)} + h_t^{(k)} \sigma_\tau^{(k,t)} + \frac{\gamma_t^{(k)}}{K} \sum_{\mu=1}^K c_{k\mu}^{(t-1)} m_{t-1}^{(\mu)} \right) \quad (25)$$

となる。ここで、全ての相関係数がゼロ、すなわち、 $\mathbf{c}^{(t)} = 0$ ($\forall t$) で全ての銘柄が無相関に動く場合、上記の予測方程式は各銘柄価格が前節で得られた予測方程式 (20)(21) に従って決定される場合に一致する。

8.2 システム・パラメータの学習

予測式 (24)(25) を用いるためには、システム・パラメータ $\boldsymbol{\theta}_k \equiv \{J^{(k)}, h^{(k)}, \gamma^{(k)}\}$ を実データから決定すべ

⁹項 $m_{t-1}^{(\mu)} S_i^{(k)}$ は「銘柄 μ を代表する典型的トレーダー $m_{t-1}^{(\mu)}$ 」(有り体に言えば、FX 取引における「ミセス・ワタナベ」のようなトレーダー) の意思決定と銘柄 k を取引するトレーダー i の意思決定 $S_i^{(k)}$ の間の相関を表す。

きである。ここでは、(25) 式両辺の差を実測価格 $q_t^{(k)}$ に対して $m_t^{(k)} \rightarrow \overline{\Delta q_t^{(k)}} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=l-M+1}^l (q_{i+1}^{(k)} - q_i^{(k)})$ の置き換えで計算し、この差分に関する過去 t ステップに渡る累積二乗誤差:

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_k(J_t^{(k)}, h_t^{(k)}, \gamma_t^{(k)}) \\ & \equiv \frac{1}{2} \sum_{l=1}^t \left[\overline{\Delta q_l^{(k)}} - \tanh \left(J_t^{(k)} \overline{\Delta q_{l-1}^{(k)}} + h_t^{(k)} \sigma_\tau^{(k,t)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma_t^{(k)}}{K} \sum_{\mu=1}^K c_{k\mu}^{(t-1)} \overline{\Delta q_{l-1}^{(\mu)}} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (26)$$

を各銘柄 $k = 1, \dots, K$ ごとにコスト関数として定義し、学習係数を η とした勾配法:

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1}^{(k)} = \boldsymbol{\theta}_t^{(k)} - \eta \frac{\partial \mathcal{E}_k(\boldsymbol{\theta}_t^{(k)})}{\partial \boldsymbol{\theta}_t^{(k)}} \quad (27)$$

によってパラメータ $\boldsymbol{\theta}_k \equiv \{J^{(k)}, h^{(k)}, \gamma^{(k)}\}$ を更新する。

9 計算機実験

上記の予測方程式 (24)(25)(27) の妥当性を検証するため、2010 年 4 月 27 日から 2010 年 5 月 13 日までの欧州ギリシャ・ショック前後における欧州ユーロ/豪ドル ($k=1$)、欧州ユーロ/加ドル ($k=2$)、欧州ユーロ/日本円 ($k=3$) の $K=3$ 種の為替データに対して計算機を用いた性能評価のための数値実験を行う。

得られた計算機実験結果を図 5 に載せよう。この図より、各々の時系列において、それぞれの平均為替レートに対し、コンマ数パーセントの誤差の範囲内での予測が実現されていることが見てとれる。

次に、各時刻でのシステム・パラメータの振る舞いを図 6(上) に載せる。この図より、パラメータ $J^{(k)}, h^{(k)}$ は $h^{(k)} \simeq 0, J^{(k)} \simeq 1$ で特徴つけられる相転移点に向かって行くことが見てとれる。このとき、相関係数 $c_{k\mu}^{(t)}$ は不規則に変化を続けるが(図 6(下))、システム・パラメータの一つである相関強度 $\gamma^{(k)}$ はゼロへ向かう。

注目すべきは、パラメータ $1/J^{(k)}$ が $h^{(k)}$ がほぼゼロへ近づいた後、 $1/J^{(k)}$ の大きな「弱結合領域」から転移点へ向かって変化している事実である。ここでの結果から、危機直後からトレーダはデータを重視した「合理的意思決定」よりも、むしろ、周りの雰囲気流された「非合理的意思決定」を開始する。これより、行動経済学における「ハーディング現象」が部分的にイジング模型の「フィルタ」を介して観測できたことになる。

10 おわりに

本稿では、社会システムの中から金融市場を取り上げ、危機前後での複数銘柄間の相互相関を可視化し、そ

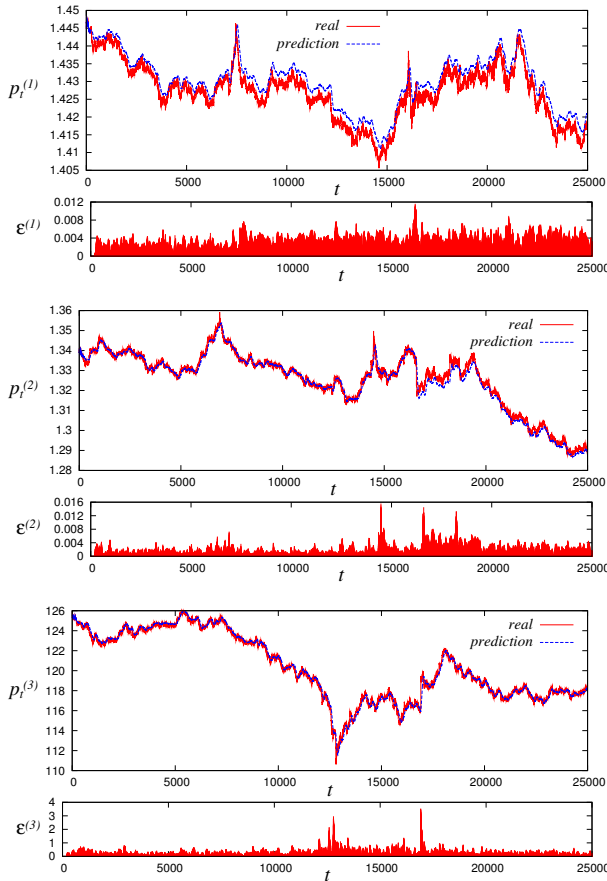


図 5: 2010 年 4 月 27 日から 2010 年 5 月 13 日までの、欧州ギリシャ・ショック前後の欧州ユーロ/豪ドル ($k = 1$), 欧州ユーロ/加ドル ($k = 2$), 欧州ユーロ/日本円 ($k = 3$) 為替レートの実測値 $q_t^{(k)}$ とその予測値 $p_t^{(k)}$, および、それらの 2 乗誤差 $\varepsilon_t^{(k)} \equiv (q_t^{(k)} - p_t^{(k)})^2$. $M = \tau = 100, \eta = 0.01$ に選んだ.

の局所的相互相関情報を用いることで複数銘柄価格を同時に予測する方法を提案した. 本手法以外にも, 銘柄間の相互相関を用いた市場の解析手法は各種提案されており, ランダム行列の固有値解析 [14, 15] やコンピュータ [16] などが知られている. これらの方法と提案手法との優劣/関係性を議論することは興味深い. また, 提案した予測モデルにおける時間方向の「階層性」, ミクロ/マクロ変数の各時間スケールについての考察は重要であり, 今後取り組むべき課題である.

研究会当日には, 時間が許せば, 紙面数の制約で本稿では省略した危機前後における複数ポートフォリオ [17] に対するボラティリティの振る舞いにも触れたい.

謝辞

本研究は科学研究費補助金 (基盤研究 (C)) 「実データ解析に基づく実証的視点からの情報統計力学の再構築」課題番号 22500195) の支援下で実施されています.

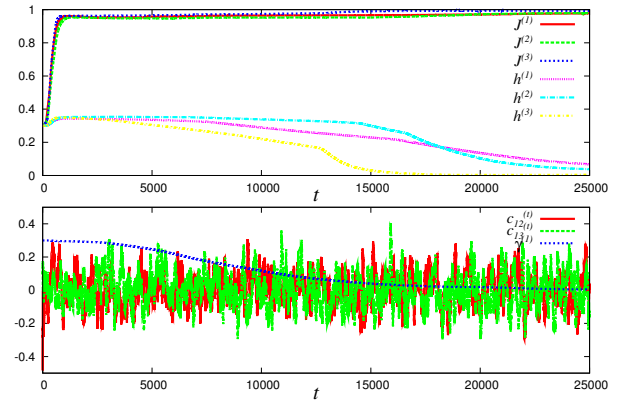


図 6: システム・パラメータ $J_t^{(k)}, h_t^{(k)}, k = 1, 2, 3$ の時間変化 (上). 下図は相互相関係数 $c_{12}^{(t)}, c_{13}^{(t)}$, および, $\gamma_t^{(1)}$ の変化.

参考文献

- [1] <http://finance.yahoo.co.jp/>
- [2] 真壁昭夫「最新 行動経済学入門」朝日新書 (2011).
- [3] R. Mantegna, *Euro. J. Phys. B* **11**, 193 (1999).
- [4] J.-O. Onnela, A. Chakrabarti, K. Kaski, J. Kertesz and A. Kanto, *Phys. Rev. E* **68**, 056110 (2003).
- [5] 永田靖, 棟近雅彦「多変量解析法入門」サイエンス社 (2001).
- [6] C.M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer (2006).
- [7] M. Blatt, S. Wiseman and E. Domany, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 3251 (1996).
- [8] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *An Introduction to Econophysics*, Cambridge University Press (2000).
- [9] A.C. ハーベイ著, 国友直人/山本拓 訳「時系列モデル入門」東京大学出版会 (1981).
- [10] J.-P. Bouchaud and R. Cont, *The European Physics Journal B* **6**, 543 (1998).
- [11] K. Watanabe, H. Takayasu and M. Takayasu, *Phys. Rev. E* **80**, 056110 (2009).
- [12] T. Kaizouji, *Physica A* **287**, 493 (2000).
- [13] J.M. Keynes, *The general theory of employment, interest and money*, Harcourt (1934).
- [14] J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing*, Cambridge University Press (2000).
- [15] G. Livan, S. Alfarano and E. Scalas, *Phys. Rev. E* **84**, 016113 (2011).
- [16] 戸坂凡展, 吉羽要直「コンピュータの金融実務での具体的な活用法の解説」日本銀行金融研究所, IMES Discussion Paper Series 2005-J-19 (2005).
- [17] H. Markowitz, *The Journal of Finance* **7**, 77 (1952).