

# オンライン・ポートフォリオ選択アルゴリズムは 本当に機能するか？

## - 機械学習および探索的アルゴリズムの実践的評価 -

### Do online portfolio Selection Algorithms Really Work?

#### - Critical Evaluation of Machine Learning and Heuristic Techniques -

海野一則<sup>1</sup> 山田隆志<sup>1</sup> 寺野隆雄<sup>1</sup>

Kazunori Umino<sup>1</sup>, Takashi Yamada<sup>1</sup>, and Takao Terano<sup>1</sup>

<sup>1</sup>東京工業大学

Tokyo Institute of Technology

**Abstract:** 本論文では、オンライン・ポートフォリオアルゴリズムが現実的にどの程度有効であるかを検証した。我々は、理想的な環境や選択株式を主体として極めて高い効用を示している手法を、より現実的なデータセットと、実践的評価による検証を行った。これらの手法が、長期に安定した運用が行えることを最重要とし、単なる効用の最大化ではなく、現実には起こりえる問題を想定した複数の評価指標が不可欠と考えた。6つの評価指標を提案し、効用を実践的な優位性として評価できる仕組みを構築する。評価手法は代表的なアルゴリズムである AntiCor および最新の手法である OLMAR である。これらの手法を、2000~2014年の期間における米国株の Nasdaq100 から 69 銘柄・SP500 から 413 銘柄で検証したので報告する。

## 1. はじめに

近年、候補となる株式の単純平均指数(以後、インデックスと略す)をアウトパフォームするいくつかの手法が発表されてきた。代表的なアプローチは、株式市場における各株式の平均回帰を予測・利用することでインデックスを上回る効用を達成する試みである。これらは、テストデータにおいては非常に高い効用を示している。では、この手法は実用化できるのだろうか。2000年以前の、ほぼ一貫した上昇相場とは全く異なる株式市場環境になっている。さらに、選択される株式が多くなることで、多様な性質を持つ株式によりサンプル・データのケースとは大きく異なる結果も考えられる。

このような観点に立てば、単なるシミュレーション結果の資産倍率を効用として評価することより、現実的に達成可能である効用として実践効用(Practical Utility)という指標の導入が必要と考えた。今後、高度なアルゴリズムを利用することによる効用やリスクは、最終的な資産価格だけでなく、資産価格の変動の途中経過や内部状態(ポートフォリオの株式構成の分布)も考慮することが重要であろう。

有効な手法が提案されたとしても、現実には再現可能であるか。様々なリスクを把握しているか。そして、総合的に見た場合に、全銘柄の単純平均指数(以後インデックス)より優れているか否かの判断は簡単にはできない。これらを客観的かつ実践的に評価する枠組みが無ければ、より高度なポートフォリオアルゴリズムを適切に評価できない。一般的なベンチマーク・データセットでは、優秀な株式のみが選択されているケースが多い。よって多様な株式でのシミュレーションを行い、現実には直面する様々なケースを想定した実践的な評価を行うこと。このようなプロセスを経て初めて実用化に向かうものと考え、実践的な評価の枠組みを提案するものである。

本論文の構成は次のようである。次章では本論文で提案する評価手法について述べる。3章では分析の結果と評価について述べる。4章では本研究をまとめる。

## 2. ポートフォリオ評価

### 2.1 関連研究

まず、ポートフォリオの代表的な評価手法について述べ、次にロバストな予測手法の研究について述べる。

代表的なパフォーマンスの評価指標は、シャープ測度・ジェンセン測度・トレーナー測度があげられる[Sharpe 94] [HÄubner 03] [HÄubner 03]。

- ・シャープ測度

$$\frac{\text{ポートフォリオの投資収益率} - \text{無リスク利率}}{\text{ポートフォリオの標準偏差}}$$

- ・ジェンセン測度

$$\frac{\text{ポートフォリオの投資収益率} - (\text{無リスク利率} + \beta(\text{市場ポートフォリオリターン} - \text{無リスク利率}))}{\text{ポートフォリオの標準偏差}}$$

- ・トレーナー測度

$$\frac{\text{ポートフォリオの投資収益率} - \text{無リスク利率}}{\text{ポートフォリオ}\beta}$$

これらの指標は、ともに平均分散を基本としており、シャープ測度では標準偏差をリスクと考える。ジェンセン測度では、市場に対するファンドの $\beta$ を基準として、さらにそれを上回る $\alpha$  (Jensens's alpha) を超過収益率と見なし、それをリスクである標準偏差で割ったものをパフォーマンスとして評価するものである。さらに、トレーナー測度はマーケット連動性である $\beta$ を基本として、そのポートフォリオの超過収益率をマーケットと連動している $\beta$ で除したものである。

次に、ポートフォリオのロバストネスを高める手法として[Lourenço 12]らの研究について述べる。プロジェクトなどの一般化されたポートフォリオにおいて、そのロバストネスを評価するために、ポートフォリオのリバランスにかかったコストと効用を一定期間ごとに評価し、収益がコストを上回り、さらに、収益と掛かったコストの比が高くなるようなポートフォリオにリバランスすることで、効率的なポートフォリオ構築しようというものである。重要な点は、個々のロバストネスは、効用をコストで除した比率である。つまりコストパフォーマンスの高さで決まることである。この考えを、株式ポートフォリオに持ち込めば、過去における損失をコストと考え、手法のロバストネスを評価する際に、過去の高い効率性を持つ銘柄に絞り込むことであろう。

一般的なポートフォリオの評価は、平均・分散を基本とした評価であり、選択したポートフォリオのインデックスに対しての優位性を示す $\alpha$ 。選択したリスク資産とマーケットの連動性を示す $\beta$ により表

現される。本研究では実践的な評価を提案する。関連研究として述べた手法も有効ではあるが、一部分の評価や改善にとどまっている。包括的かつ非常に実践的な総合的評価が無ければ、長期の資産運用における有効な手法か否かを定量的に評価できない。

本論文の分析対象となる手法は、大きく平均から乖離した株式が平均に回帰する現象を利用するものであり、手法の効用がインデックスに相関するという前提を持つことはできない。つまり、ポートフォリオの資産価格は、インデックスとは全く異なる性質を持った変動になるという前提で考えるべきであろう。よって、 $\alpha \cdot \beta$ という値によってのみ優位性を決めることは適当ではない。今まで評価の対象となっていなかった途中経過(プロセス)や内部の状態も含めて評価することが必要であろう。

手法の評価を行う場合、同じ効用であれば、ドロウダウンが大きな手法より小さな手法が優れている。同じ効用であれば、1銘柄に投資するより多くの銘柄に分散投資を行っている手法が優れていると言える。このような基本的な要素がポートフォリオの評価項目の中には入っていなかった。確かに、最大ドロウダウン(以後 MaxDDと略す)や分散化の度合いは標準偏差に顕著に反映されるため、間接的に評価されていると考えることもできる。しかし、リーマンショックの様な大幅な下落時には、最大ドロウダウンが50%を超えるようなケースが発生した。効用が低くともMaxDDがインデックスの0.7以下に押さえられている手法を選べば、リーマンショックでも35%程度の下落で収まる確率が高いはずであり、投資家に大きな安心感を与えることになる。

このように明確な評価指標を設けることで、より適切な手法の評価を行えると考える。

提案する6つの評価指標から算出される実践的効用(Practical Utility)は、全ての評価の積で表現されるため、どの要素が欠けていても高い評価は得られない。よって、非常に信頼できる厳しい評価手法であると考えられる。効用を各評価指標で補正した結果が実践効用であり、その手法の本質的な優位性を示す。そして、優位性の中には効用やボラティリティーだけでなく、安全性の基準としての心理的評価・分散化評価。実現可能性の基準としての、運用コスト評価・ロバストネス評価・パラメータ安定性評価の視点が組み込まれている。ある手法で得られた実践効用は、その手法がインデックスに対して、どの程度優位性を持つかを示す。本論文では、このような総合的な評価指標の組み合わせにより、実践的な評価を行う枠組みを提案する。

## 2.2 提案する評価手法

本研究以下の6つの評価指標を提案するものである。

- (1) 一般的評価指標
- (2) 心理的評価指標
- (3) 分散化評価指標
- (4) 運用コスト評価指標
- (5) ロバストネス評価指標
- (6) パラメータ安定性評価指標

一般評価指標は、効用とボラティリティー。心理的評価指標はインデックスと各手法のMaxDDを比較。分散化指標では、分散化の程度を評価する。広く分散化されていない場合は効用を減じることで、潜在的なリスクを効用に反映させる。

運用コスト評価指標は、高頻度な売買で小さな収益を積み上げるタイプの手法のリスクも適切に評価する。高い頻度でリバランスする手法では、コストの僅かな変化が大きく効用を変化させる。ロバストネス評価指数では、ポートフォリオを構成する際の選択候補とインデックスとの差を評価する。パラメータ安定性評価指標では、最適なパラメータを予測する難易度を簡易的に評価した指標である。

### 2.2.1 一般評価指標

- ・効用（最終資産倍率）  
これを基準として、他の指標により補正を行う。効用は、幾何平均の年率のリターン(Annual Return Rate 以後 ARR と略す)として表現する。
- ・ボラティリティー  
資産価格の標準偏差  
一般評価指標=(ARRmethod/ARRindex)×  
(Volatility<sub>index(win\_size)/Volatility<sub>method(win\_size)</sub>)<sup>k1</sup></sub>

### 2.2.2 心理的評価指標

最大ドローダウン（一時的な資産の減少の最大幅を全期間に渡り求め最大値を返す）を評価対象とする。

$$MDD(T) = \max_{\tau \in (0, T)} \left[ \max_{t \in (0, \tau)} X(t) - X(\tau) \right]$$

ある手法による最大ドローダウンが0.7(70%の下落)、インデックスの最大ドローダウンを0.45(45%の下落)となった場合、

$$\text{心理的評価指標} = \left( \frac{1.0 - MDD_{\text{method}}(T)}{1.0 - MDD_{\text{index}}(T)} \right)^{k2}$$

このケースでは、  
心理的評価指数=(1.0-0.7)/(1.0-0.45)=0.545  
年率リターンに対して、(0.545)<sup>k2</sup>と補正する。  
心理評価指標が1.0を超えた場合、これは効用が増加したことと同様の効果となる。

### 2.2.3 分散化評価指標

ポートフォリオが、どの程度分散化されているかを評価する。これは、潜在的なリスクを減らすための重要な概念である。適切な指標が無かったため、カルバック・ライブラー情報量を拡張したジャンセン・シャノンダイバージェンスにより2つの分布の歪みの程度を計測する。そして、歪みの大きさに比例して効用を減少させることで、潜在的なリスクを反映させた。

以下の手順で評価する。

- ・まず、株ポートフォリオを構成する銘柄の重みを大きい順に並べ、全ての銘柄に均等に分散した場合とのジャンセン・シャノンダイバージェンス(Jensen-Shanon Divergence 以後 JSD と略す)により求める。JSD は、カルバック・ライブラー情報量をプラス方向とマイナス方向が対称になるように拡張したものである。J
- ・SD における P と Q には、10銘柄に均等に分散された場合の分布(全て0.1の10個の配列)と、ポートフォリオの各株式の重みを大きい順にソートした(例えば、[0.6,0.2,0.1,0.06,..])となる10個の配列。合計は1.0)を与える。

ただし、値が0.0の場合はエラーとなるため、非常に小さな値1.0e-15を便宜上加えて計算している

#### カルバック・ライブラー情報量

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_i P(i) \log \frac{P(i)}{Q(i)}$$

ジャンセン シャノン ダイバージェンス

$$JSD(P || Q) = \frac{1}{2}D(P || M) + \frac{1}{2}D(Q || M)$$

$$M = \frac{1}{2}(P + Q)$$

20銘柄への均等分散を行った場合と、1銘柄のみの投資のJSDは0.592となるため0.6を最大値とし、これを基準にした。

分散化評価指標=((0.6-JSD)/0.6)<sup>k3</sup>

JSDは2つの分布が同じときは0となる。

Case1) 20銘柄に均等分散投資した場合と1銘柄に投資した場合のJSD値は0.592になる。

分散化評価指標=((0.6-0.592)/0.6)<sup>k3</sup>=0.013<sup>k3</sup>

Case2) 20銘柄均等分散と、3銘柄に0.5,0.3,0.2という重みで投資した場合、

分散化評価指標=((0.6-0.475)/0.6)<sup>k3</sup>=0.208<sup>k3</sup>

Case3) 20銘柄均等分散と5銘柄均等分散では、

分散化評価指標=((0.6-0.380)/0.6)<sup>k3</sup>=0.360<sup>k3</sup>

### 2.2.4 運用コスト評価指標

マーケットインパクトもコストと考え、ポートフォリオ入れ替え時のコスト(手数料+マーケットインパクト)を論文等では片道0.1%程度としている[Li

12]。ただし、これらの論文では、コストが増大したときのシミュレーションも別途行っている。米国のような高い流動性を持つ株式であれば0.1%というのはある程度、妥当であると考えられる。ただし、コストの増加に対して資産価格がどの程度変化するかについて知っておくことは重要である。

評価手法は、ポートフォリオに与えるべき適切な株式の重みを毎日計算する。そして、現在のポートフォリオとの差を毎日修正するものである。よって、ほぼ毎日リバランスが起こっているため、取引コストが非常に重要になってくる。

たとえば、取引コストが売買片道 0.1%で、毎日1回全ての資産を売買する手法の場合では、14年間では、 $0.999^{(2 \times 252 \times 14)} = 7.68/10000$

もし、資産が変わらずコストだけで毎日減少するケースでは約1/1300である。これは、コストを考えずに資産価格が1300倍になったとして、やっと元本が確保できるだけである。もし、片道0.2%のコストがかかるとすれば、1日1回売買で $0.998^2$ に資産が減少する。よって、14年間では $5.857e-07$ となる。

つまり、売買頻度が高ければ僅かなコストの増加が甚大な影響を与える。よって、なるべく売買の少ない手法であることが望ましい。評価を明確にすることでその潜在的なリスクを明確にできる。

運用コストを、0.1%および0.2%のケースにおける資産に対する累積的効用の減少を年換算したものを比較している。

運用コスト評価指標=

$$ARR_{\text{method}}(\text{cost}=0.2)/ARR_{\text{method}}(\text{cost}=0.1)$$

たとえば、取引コストが0.1%から0.2%に上昇した場合に、効用が60%減少するケースでは、運用コスト評価指標 $= (1.0-0.6)^k$ となる

## 2.2.5 ロバストネス評価指標

ロバストネスとは、同様の環境下での効用を複数の条件下でシミュレーションを行い、偶然的な要素をなるべく排除し効用を適正化するものである。その際に、対象となる株式のインデックスと選択手法との平均年率リターンとの比で求める。また、その際に0.1%の取引コストを用いる。

Case1 ランダムに選択して候補の半数からポートフォリオを作成

Case2 上位20%の銘柄からポートフォリオを作成

Case3 下位50%の銘柄からポートフォリオを作成

Case4 下位20%の銘柄からポートフォリオを作成

Case5 開始時点より下落した銘柄のみでポートフォリオを作成

各手法で得られたARRを $ARR_{\text{method}}(\text{case } i)$ とする。

以下に示すType1,2,3,4に従い有効性をRIとする。下落相場やマーケットのモーメンタムが低下した場合のロバストネス評価が重要と考えるからである。

Type1:  $ARR_{\text{index}} < 0$  and  $ARR_{\text{OLMAR}} < 0$

Type2:  $ARR_{\text{index}} > 0$  and  $ARR_{\text{OLMAR}} < 0$

Type3:  $ARR_{\text{index}} < 0$  and  $ARR_{\text{OLMAR}} > 0$

Type4:  $ARR_{\text{index}} > 0$  and  $ARR_{\text{OLMAR}} > 0$

$$RI = ARR_{\text{OLMAR}} / ARR_{\text{index}}$$

Type1,2:  $RI = 1.0/|RI|$  Type3,4:  $RI = |RI|$

と変換し、全て  $RI > 0$  とする

ただしRIの最大値は3.0とする。

$RI > 1$  であればインデックスより有利である。

## 2.2.6 パラメーター安定性評価指標

各手法において、たとえばWindow Size等の最適パラメータ推定の安定性を指標化する。Window\_sizeとは評価する期間の長さで、移動平均Window\_sizeが20であれば、20日移動平均を利用した評価ということになる。最も重要なパラメータの一つとも言える。

多くの論文では効用の最大値が記載されている。最適なパラメータが推定できたという前提である。しかしながら、最適なパラメータが事前に解くことは無く、予測により値を推定することになる。

最適パラメータの推定手法については、様々な手法が開発されると考えるが、その精度は基本的にパラメータの安定性に帰着するものとする。最適パラメータに対する前後n個のパラメータでの効用の平均を最大効用で割ったものをパラメータ安定化指標と呼ぶ。この指標が、1.0に近いほどパラメータが安定し予測が容易であるとする。最大効用を再現しやすいとも言える。パラメーター・センシティブティが高い場合、最適パラメータの予測精度が低下し効用も不安定となる。効用の最大値が非常に高いとしても、それがなだらかに変化し、予測が容易かつ安定性が高くなければ最適なパラメータを予測することはできず、効用の再現は非常に難しいことになる。本研究では、それらを簡易的に判断するために、以下のような手法を提案する。

- [Li 12]の論文を参考にwindow\_sizeの評価範囲を5~30とする。+2の範囲を計算するため3~32までの範囲を探索することになる。
- 対象期間を均等に4つの区間に分けて、1,1~2,1~3,1~4の区間での平均値を求める。これは、パラメータの最適値が時間とともに変化すると仮定するからである。その際に、期間が長くなるケースにおいてパラメータの安定性が得られるか否かも簡易的に評価するものである。
- 各区間において、最大のARRを得られた

window\_size および+ 2 の範囲における平均 ARR の割合を評価指標の値とする。

パラメータの予測値を、ある程度の誤差を含んだパラメータの効用で代用する。さらに、4つの区間の平均を最終的な評価指標とする。

ある市場において window\_size=28 のとき効用が最大であったとすると、

$$W1=1/5 \times \sum_{i=1}^{26 \sim 30} ARR_{\text{method}}(\text{window\_size}=i)$$

$$W2= ARR_{\text{method}}(\text{window\_size}=28)$$

$$\text{パラメータ安定性指標}=(1/n \sum_{i=1}^n W1_i/W2_i)^{k6}$$

n=4 #1,1~2,1~3,1~4 の4つの区間の平均

k6 は事前に与えられた補正値

## 2.2.7 実践効用の計算方法

実践効用=一般評価指標×心理的負担評価指標×分散化評価指標×運用コスト評価指標×ロバストネス評価指標×パラメータ安定性評価指標により算出する。また、それぞれの補正用パラメータ ki等を事前に設定するものとする

## 3. 実証分析

### 3.1 対象データ

本研究では、米国株式市場のデータのみを対象とし2000年1月~2014年6月まで3677日の日次データの終値(Close 価格)のみを使用した。対象となる株式は、米国 Nasdaq100 指数構成銘柄から、その全期間上場してデータのあるもの69銘柄。同様に SP500 指数構成銘柄から413銘柄を対象にした。

また、これらの銘柄は、2014年において Nasdaq100 および SP500 に選択されている銘柄であり、勝ち残りバイアスかかっていることになる。Nasdaq100 および SP500 のインデックスの最終資産倍率は4.79倍および8.13倍であり、ARRは11.41%と15.56%である。この間、Nasdaq100 指数(^NDX)は3520から3700に。SP500 指数(^GSPC)は1441から1960になっている。よって、候補となる株式群は結果的に非常に優秀な銘柄のみを選択していると言える。この非常に強い勝ち残りバイアスに対しての補正が必要であると考ええる。本研究では、ロバストネス評価指標の項目で低パフォーマンス群からの株式選択を多くすることでバランスを取っている。

### 3.2 アルゴリズム

本研究では、代表的かつ安定した効用を示す2つの手法を対象とした。online portfolio 選択アルゴリズムである AntiCor および OLMAR である。

これらの手法は、短期間(1~5日)における平均回帰現象を検出し、それを利用してポートフォリオの効用を上げる手法である。

まずオンラインポートフォリオ選択アルゴリズムの基本的な枠組みを図1に示す。

#### ALGORITHM 1: Online portfolio selection framework.

**Input:**  $x_t^n$ : Historical market sequence

**Output:**  $S_n$ : Final cumulative wealth

Initialize  $S_0 = 1, b_1 = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$

for  $t = 1, 2, \dots, n$  do

Portfolio manager computes a portfolio  $b_t$ ;

Market reveals the market price relative  $x_t$ ;

Portfolio incurs period return  $b_t^T x_t$ , and updates cumulative return  $S_t = S_{t-1} \times (b_t^T x_t)$ ;

Portfolio manager updates his/her online portfolio selection rules;

end

図1 ポートフォリオ選択手法 ([Li 14], p.5, Figure 1)

さらに、AntiCor アルゴリズムは、株式間の window\_size を基本とした2期間において、出遅れた株式が平均に追いつく過程で発生する平均回帰を検出利用するものである。詳細を図2に示す。双方がともに上昇しているという条件のもと、出遅れた株式が、先に上昇した株式に追いつくという仮定により、出遅れた株式群を購入する。その度合いに応じて配分の比率を改めるものである。これを、毎日繰り返すことにより、常に遅れた株が平均への回帰を起こす現象(follow-the-Loser approach)を捉えるものである [Li 14]。

#### Algorithm ANTICOR( $w, t, X_t, \hat{b}_t$ )

**Input:**

1.  $w$ : Window size
2.  $t$ : Index of last trading day
3.  $X_t = x_1, \dots, x_t$ : Historical market sequence
4.  $\hat{b}_t$ : current portfolio (by the end of trading day  $t$ )

**Output:**  $b_{t+1}$ : Next day's portfolio

1. Return the current portfolio  $\hat{b}_t$  if  $t < 2w$ .
2. Compute  $LX_1$  and  $LX_2$  as defined in Equation (2), and  $\mu_1$  and  $\mu_2$ , the (vector) averages of  $LX_1$  and  $LX_2$ , respectively.
3. Compute  $M_{cor}(i, j)$  as defined in Equation (3).
4. Calculate claims: for  $1 \leq i, j \leq m$ , initialize  $\text{claim}_{i \rightarrow j} = 0$
5. If  $\mu_2(i) \geq \mu_2(j)$  and  $M_{cor}(i, j) > 0$  then
  - (a)  $\text{claim}_{i \rightarrow j} = \text{claim}_{i \rightarrow j} + M_{cor}(i, j)$ ;
  - (b) if  $M_{cor}(i, i) < 0$  then  $\text{claim}_{i \rightarrow j} = \text{claim}_{i \rightarrow j} - M_{cor}(i, i)$ ;
  - (c) if  $M_{cor}(j, j) < 0$  then  $\text{claim}_{i \rightarrow j} = \text{claim}_{i \rightarrow j} - M_{cor}(j, j)$ ;
6. Calculate new portfolio: Initialize  $b^{t+1} = \hat{b}_t$ . For  $1 \leq i, j \leq m$ 
  - (a) Let  $\text{transfer}_{i \rightarrow j} = b_i^t \cdot \text{claim}_{i \rightarrow j} / \sum_j \text{claim}_{i \rightarrow j}$ ;
  - (b)  $b_i^{t+1} = b_i^{t+1} - \text{transfer}_{i \rightarrow j}$ ;
  - (c)  $b_j^{t+1} = b_j^{t+1} + \text{transfer}_{j \rightarrow i}$ ;

図2 AntiCor アルゴリズム ([Borodin 04], p.585, Figure 1)

ただし、候補となる株式数に対して  $O(n^2)$  であり計算量が大きいことが欠点である。これは、最初に提案されたヒューリスティック・アルゴリズムであり、安定した効用を得られる手法である。

次に、代表的かつ効用の高い OLMAR アルゴリズムを説明する。OLMAR アルゴリズムも AntiCor と同様に、出遅れた株式に多く重みをかける。単なる平均ではなく、任意の移動平均を基準にし、移動平均からの乖離の大きさに準じて重みを増やし、移動平均に近づくほど重みを減じる手法である。図 3 および図 4 にアルゴリズムを示す。

移動平均は複数期間の平均であり、検出する精度が上がっており、パフォーマンスと安定性が向上。取引頻度も減少させている。

#### Algorithm 1 Portfolio Selection with OLMAR.

- 1: **Input:**  $\epsilon > 1$ : Reversion threshold;  $w \geq 3$ : Window size;  $\mathbf{x}_1^n$ : Market sequence;
- 2: **Output:**  $S_n$ : Cumulative wealth after  $n^{th}$  periods
- 3: **Procedure:**
- 4: Initialization:  $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{m}\mathbf{1}$ ,  $S_0 = 1$ ;
- 5: **for**  $t = 1, 2, \dots, n$  **do**
- 6: Receive stock price relatives:  $\mathbf{x}_t$
- 7: Calculate daily return and cumulative return:  
 $S_t = S_{t-1} \times (\mathbf{b}_t \cdot \mathbf{x}_t)$
- 8: Predict next price relative vector:  
$$\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}(w) = \frac{1}{w} \left( 1 + \frac{1}{\mathbf{x}_t} + \dots + \frac{1}{\otimes_{i=0}^{w-2} \mathbf{x}_{t-i}} \right)$$
- 9: Update the portfolio:  
 $\mathbf{b}_{t+1} = \text{OLMAR}(\epsilon, w, \tilde{\mathbf{x}}_{t+1}, \mathbf{b}_t)$
- 10: **end for**

図 3 OLMAR アルゴリズム ([Li 12],p.5,Figure 3)

#### Algorithm 2 OLMAR( $\epsilon, w, \tilde{\mathbf{x}}_{t+1}, \mathbf{b}_t$ ).

- 1: **Input:**  $\epsilon > 1$ : Reversion threshold;  $w \geq 3$ : Window size;  $\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}$ : Predicted price relatives;  $\mathbf{b}_t$ : Current portfolio;
- 2: **Output:**  $\mathbf{b}_{t+1}$ : Next portfolio;
- 3: **Procedure:**
- 4: Calculate the following variables:  
$$\bar{\mathbf{x}}_{t+1} = \frac{\mathbf{1}^\top \tilde{\mathbf{x}}_{t+1}}{m}, \lambda_{t+1} = \max \left\{ 0, \frac{\epsilon - \mathbf{b}_t \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{t+1}}{\|\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} - \bar{\mathbf{x}}_{t+1}\mathbf{1}\|^2} \right\}$$
- 5: Update the portfolio:  
$$\mathbf{b}_{t+1} = \mathbf{b}_t + \lambda_{t+1}(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} - \bar{\mathbf{x}}_{t+1}\mathbf{1})$$
- 6: Normalize  $\mathbf{b}_{t+1}$ :  
$$\mathbf{b}_{t+1} = \arg \min_{\mathbf{b} \in \Delta_m} \|\mathbf{b} - \mathbf{b}_{t+1}\|^2$$

図 4 OLMAR アルゴリズム ([Li 12],p.5,Figure 4)

移動平均は複数期間の平均であり、これにより検出する精度が上がっており、パフォーマンスと安定性が向上。取引回数も減少させている。

### 3.2 ベンチマーク・データの検証

我々が開発した AntiCor および OLMAR を検証。ベンチマーク・データを図 5 に示し、[Li 12]に記載された効用(表 1)が達成できているか否かをベンチマーク・データにより検証した。

Dataset	Region	Time frame	# days	# assets
NYSE (O)	US	3/7/1962 - 31/12/1984	5651	36
NYSE (N)	US	1/1/1985 - 30/6/2010	6431	23
DJA	US	1/1/2001 - 14/1/2003	507	30
TSE	CA	4/1/1994 - 31/12/1998	1259	88

図 5 ベンチマーク・データセット ([Li 12],p.6,Figure 5)

Methods	NYSE (O)	NYSE (N)	DJA	TSE
Market	14.50	18.06	0.76	1.61
Best-stock	54.14	83.51	1.19	6.28
BCRP	250.60	120.32	1.24	6.78
UP	26.68	31.49	0.81	1.60
EG	27.09	31.00	0.81	1.59
ONS	109.19	21.59	1.53	1.62
$B^K$	1.08E+09	4.64E+03	0.68	1.62
$B^{NN}$	3.35E+11	6.80E+04	0.88	2.27
CORN	1.48E+13	5.37E+05	0.84	3.56
Anticor	2.41E+08	6.21E+06	2.29	39.36
PAMR	5.14E+15	1.25E+06	0.68	264.86
CWMR	6.49E+15	1.41E+06	0.68	332.62
OLMAR	<b>3.68E+16</b>	<b>2.54E+08</b>	2.06	<b>424.80</b>
BAH(OLMAR)	2.27E+16	1.41E+08	<b>2.38</b>	172.11
MAX(OLMAR)	1.62E+17	3.95E+08	3.30	1.18E+03

表 1 主要アルゴリズムによる効用 ([Li 12],p.7,Figure 6)

NYSE:米国ニューヨーク証券取引所

DJI:米国 ダウ・ジョーンズ工業株 30 種

TSE:カナダ トロント証券取引所

Window_size	NYSE(0)	NYSE(N)	DJA	TSE
5	9.75x10 <sup>7</sup>	1.46x10 <sup>5</sup>	1.78	24.60
10	1.77x10 <sup>7</sup>	2.28x10 <sup>5</sup>	1.60	101.84
15	6.26x10 <sup>6</sup>	4.62x10 <sup>5</sup>	1.58	78.95
20	2.19x10 <sup>6</sup>	5.97x10 <sup>4</sup>	1.56	11.89
25	1.33x10 <sup>5</sup>	4.74x10 <sup>3</sup>	1.63	20.39
30	7.32x10 <sup>4</sup>	2.82x10 <sup>4</sup>	1.93	14.92

表 2 AntiCor 取引コストがゼロのケース

Window_size	NYSE(0)	NYSE(N)	DJA	TSE
5	7.65x10 <sup>16</sup>	4.21x10 <sup>8</sup>	2.20	59.00
10	1.03x10 <sup>15</sup>	2.91x10 <sup>8</sup>	1.17	117.40
15	1.53x10 <sup>14</sup>	8.74x10 <sup>7</sup>	1.68	93.73
20	6.27x10 <sup>13</sup>	4.29x10 <sup>7</sup>	2.13	110.04
25	1.71x10 <sup>13</sup>	7.71x10 <sup>7</sup>	2.50	115.84
30	5.38x10 <sup>11</sup>	9.51x10 <sup>7</sup>	2.44	103.09

表 3 OLMAR 取引コストがゼロのケース

本研究における開発プログラムのテスト結果を表 2, 3 に示す。論文[Li 12]では最大の効用(取引コストを 0 とした場合)について記載されており、ほぼ同等の効用を達成している。また、論文中にパラメータの値が記載されていないため、window\_size の違いによる複数の条件下での結果を示した。OLMAR においてパフォーマンスが低いケースは、window\_size および epsilon という 2 つのパラメータのうち、epsilon を 10 に固定化している影響と考えられる。

### 3.3 新しいデータセットの検証

米国株式市場の Nasdaq100 に属する 63 銘柄。さらに、SP500 指数に属する 432 銘柄を用いて、2000 年から 2014 年 6 月までの IT バブル崩壊・リーマンショックという多様な株式市場環境の変化を含むものである。まず一般的なベンチマークを行った結果を表 4, 5 に示す。

Window_size	NQ100	NQ 0.1%	SP500	SP 0.1%
5	22.77	0.52	2734.56	53.19
10	75.42	4.22	9044.36	340.11
15	15.90	1.58	340.66	22.23
20	30.14	3.85	34.57	3.46
25	125.60	19.21	336.60	44.09
30	89.32	16.10	2.09	0.31

表 4 AntiCor による取引コスト=0 と 0.1%のケース

Window_size	NQ100	NQ 0.1%	SP500	SP 0.1%
5	56.33	0.59	2.01	0.02
10	384.31	15.95	10846.03	768.69
15	27.77	2.90	1731.57	255.18
20	47.06	7.16	552.90	117.12
25	204.38	41.03	576.20	156.09
30	99.72	24.03	210.14	67.35

表 5 OLMAR による取引コスト=0 と 0.1%のケース

新しいデータセットにおいては、マーケット環境の厳しさにより、ベンチマーク・データより大きく効用が減少している。さらに、頻繁なリバランスの発生により 0.1%のコストに押さえても、大きなパフォーマンスの低下がある。ただし、OLMAR においては Window\_size が大きくなるにつれ、株式の保持期間が長期化することで、取引コストによるパフォーマンスの減少が相対的に押さえられている。また、AntiCor の欠点としては、株式数の多い SP500 のケースにおいて極端パフォーマンスの低下が見られることである。これは、銘柄数が多いために、その多様な性質を持つ銘柄のノイズを拾ってしまうことに起因するものと考えられる。また、AntiCor は、1 期間(1

日)の歪みを検出することに対して、OLMAR は多期間(window\_size)における歪みを検出している。よって、長期間になると適切な検出ができたものと考えられる。

### 3.4 各評価指標の検証

SP500 の 14 年間のデータで、最も効用の高い安定手法である OLMAR にて検証を行った。ここでは、各係数  $k_i$  は全て 1.0 として評価する。まず、一般化評価手法において、ボラティリティの大きさが想定以上であった。Window\_size=30 とした場合、ボラティリティは、インデックスの 8.3 倍であり、一般的手法ではとても考えられない大きなリスクを取っていることになる。さらに、心理的評価指標でも、MaxDD の大きさが想定以上であり 96.4%となった。これは、資産が一時的に 1/25 になるため、リスクが非常に高い手法である。さらに、分散化評価指標は、0.065 であり分散化がほとんど行われていないことが解る。

内容を精査せずに効用だけで見ることがいかに危険であるかが理解できる。よって、効用では非常に優秀な手法が一般評価指標および心理的評価指標として分散化指標では非常に厳しい評価となった。

この 3 つの指標で、 $0.119 \times 0.065 \times 0.159 = 0.00123$  となり効用は 1/800 となってしまう。これらの値を  $ARR_{method}$  に直接乗じた値を使う訳ではなく、各係数である  $k_i$  を適切に決めることで実践効用を補正して使用する。

運用コスト評価指標は、0.92 であり、片道の取引コストが 0.1%上昇することで資産は 1 年間で 0.92 倍になる。ロバストネス評価指数の検証でを表 6 に示す。Under は、2000 年より 2014 年において価格が下落した株式のみを対象としている。

win	up20%	low50%	low20%	under	ランダム
5	0.83	0.13	0.01	0.17	0.91
10	2.64	2.71	1.21	0.29	1.83
15	2.08	2.93	3.00	1.81	2.07
20	2.07	1.98	3.00	0.52	1.86
25	1.60	2.58	2.58	0.34	1.85
30	2.03	0.97	0.97	0.68	1.54

表 6 ロバストネス評価指数(OLMAR, SP500)

本検証では極端に効用の低い株式(under)は不利であり、それらを除外すれば window\_size が 10~25 の範囲でインデックスより有利であった。

パラメータ安定化指標の解析結果を表 7 に示す。このケースでは、パラメータの最適値の変動が無く、

window\_size 周辺の平均値も非常に高いため、パラメータ評価指標は高い数値となった。

区間	効用が最大となる window	最大 ARR	周辺 ARR の平均	パラメータ安定化指標
1	11	24.00	21.15	0.88
1~2	11	35.62	32.12	0.90
1~3	11	64.85	56.30	0.86
1~4	11	68.16	60.07	0.89

表 7 パラメータ安定化指標(OLMAR, SP500)

### 3.5 実践効用の算出

ここでは、OLMAR window\_size=30 SP500 の分析ケースについて実践効用を算出する。

実践効用(PU)=一般評価指標×心理的負担評価指標×分散化評価指標×運用コスト評価指標×ロバストネス評価指標×パラメータ安定性評価指標

k1=0.5 #一般評価指標(ボラティリティ25日)は 0.5 乗する  
k2=0.1 #心理的負担評価指標(MaxDD)は 10 年評価  
k3=0.25 #分散化評価指標 0.25  
k4=0.5 #運用コスト評価 年換算  
k5=1.0 #ロバストネス評価 年換算での優位性指標  
k6=1.0 #パラメータ安定化指標 年換算

$ARR_{olmar}(window=30)=33.7\%$   $ARR_{index}=15.55\%$   
実践効用 $= (1.337/1.155) \times 0.119^{0.5} \times 0.065^{0.1} \times 0.159^{0.2} \times 0.92^{0.5} \times ((2.03+0.97+0.97+0.68+1.54)/4)^{0.5} \times ((0.88+0.90+0.86+0.89)/4)^{0.5}$   
 $= 1.1575 \times 0.345 \times 0.761 \times 0.631 \times 0.959 \times 1.244 \times 0.939 = 0.215$

$PU_{olmar}(window=30)=0.215$   
 $PU_{olmar}(window=25)=0.267$   
 $PU_{olmar}(window=20)=0.303$   
 $PU_{olmar}(window=15)=0.259$   
 $PU_{olmar}(window=10)=0.096$   
 $PU_{olmar}(window=5)=0.142$

係数 ki によって評価は異なるが、様々な要素を考慮したモデルを構築することで、各パラメータの最大の実践効用(PU)を算出できる。PUが1.0でインデックスと同等であり、1.0以上で有利な手法と言える。また、どの評価指数を改善すれば実践効用が上がるかを容易に判断できる。

評価した OLMAR 手法では、一般評価指標のボラティリティを低下させ、心理的評価指数である MaxDD を小さくすること。さらに、分散化評価指標を上げるためにより多くの株式に均等に分散化することで大きく改善でき、現実的に利用可能な手法になる可能性がある。

## 4. 結論

本論文では、6つの評価指数によりオンライン・ポートフォリオ選択アルゴリズムを米国株式での評価を行った。提案手法により、単なる最大効用の比較では無く、より深く実践的な解析を行うことがで

きた。途中経過も評価し、内在するリスクも各評価指標で表現される。さらに、評価手法を実用化しようとした際の問題点を明確にし、手法の改善点が容易に理解できた。また、実践効用という一つの値で優位性を理解できるため、様々な手法やパラメータによる結果を容易に比較可能となった。

今後は、より多くの株式市場でオンライン・ポートフォリオ選択アルゴリズム手法の評価をおこない、評価手法モデルの改善を行う必要がある。

## 参考文献

- [Jegadeesh 93] N. Jegadeesh, S. Titman : Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency, The Journal of Finance, VOL. XLVIII, NO. 1 MARCH (1993)
- [Borodin 04] A. Borodin, R. EL-Yaniv, V. Gogan : Can We Learn to Beat the Best Stock, Journal of Artificial Intelligence Research 21, pp.579-594 (2004)
- [Li 12] Bin Li, S. C. H. Hoi : On-Line Portfolio Selection with Moving Average Reversion, arxiv.org/pdf/1206.4626v1
- [Sharpe 66] W. Sharpe : Mutual Fund Performance The Journal of Business, Vol. 39, No. 1, Part 2, pp. 119-138 (1966)
- [Jensen 67] M. C. Jensen : The Performance of Mutual Funds In The Period 1945-1964, Journal of Finance, Vol. 23, No. 2, pp. 389-416 (1967)
- [Häubner 03] Georgs Häubner : The Generalized Treynor Ratio : Review of Finance, Volume 9, Issue 3, pp. 415-435
- [Lourenço 12] J. C. Lourenço, A. Morton, C. A. Bana e Costa: PROBE-A multicriteria decision support system for portfolio robustness evaluation, Decision Support Systems Volume 54, Issue 1, December 2012, pp 534-550
- [Zakamouline 09] V. Zakamouline, S. Koekebakker Portfolio performance evaluation with generalized Sharp ratios: Beyond the mean and variance Journal of Banking & Finance Volume 33, Issue 7, July 2009, pp. 1242-1254
- [Li 14] Bin Li, S. C. H. Hoi: Online portfolio selection: A survey, ACM Computing Surveys (CSUR), Volume 46, Issue 3, January 2014, Article No. 35