

イジングモデルによる複数時系列の株価変動シミュレーション

Multiple time series simulations of stock price dynamics by Ising model

高石哲弥

Tetsuya Takaishi

広島経済大学

Hiroshima University of Economics

Abstract:

これまでの実証分析によって株価の変動は単純なランダムウォークではなく、いくつかの特徴があることが知られている。例えば、(1) 収益率の自己相関は小さいが、絶対値収益率の自己相関は長期にわたっている、(2) 収益率分布は正規分布とは違い、裾野の広がった分布をしている、(3) ボラティリティクラスタリングが現れる、等の特徴がある。これらの特徴を捉えた、非常に簡単なモデルとして Bornholdt のイジングモデルがある。本研究では、このモデルを相互作用のある複数の株価時系列モデルに拡張し、シミュレーションを行った。その結果、元のモデル同様の株価の変動の性質を持ちつつ、且つ株価のボラティリティ間に相関のあるモデルとなることが分かった。

1. はじめに

株価の変動は性質は実証分析によってよく調べられており、それらの性質は Stylized facts[1]として知られている。例えば、(1) 収益率の自己相関は小さい、(2) 絶対値収益率の自己相関は長期にわたる、(3) 収益率分布は正規分布とは違い、裾野の厚い分布である、(4) ボラティリティクラスタリングという変動の大きい時期が続いたり、変動の小さい時期が続く、などの性質がある。株価変動のシミュレーションを行う場合、実証的に知られているこれらの性質を再現できるモデルを使うのが望ましい。本研究では、シミュレーションに Bornholdt のイジングモデル[2]を利用するが、このモデルは非常にシンプルでありながら、これらの性質を反映することができる。このモデルでは2つの相反する作用のみを導入する。1つは周りに同調するマジョリティ効果に対応し、例えば周りに買う人が多ければ自分も買おうとし、逆に売る人が多ければ自分も売ろうとすることに対応する。もう1つは、全体の動きと反対の行動をとるマイノリティ効果である。これは、市場全体に買う人が多ければ自分は売ろうとし、売る人が多ければ買おうとすることに対応する。これら2つの作用によって、このモデルは複雑な非定常な動

きを見せる。Bornholdt によるこのモデルの提唱後、このモデルを使った研究がなされているが、それらは株価の1時系列を扱ったものである。実際の市場では多数の株価が取り引きされ、それらの株価間には相関がある場合が多い。従って、現実的な市場のシミュレーションには、多数の株価の変動をシミュレーションできるモデルが必要となる。本研究では、Bornholdt のモデルを拡張し、複数の株価のシミュレーションを行うモデルを構築し、そのモデルによるシミュレーションの結果を報告する。

2. Bornholdt モデル

D 次元の L^D 格子を考える。エージェント i はこの格子点 i にいるとする。この時、全体で $N = L^D$ 個のエージェントが存在することになる。エージェントはスピン S_i を持ち、 S_i は $+1$ または -1 の値をとるとする。ここでは、 $+1$ の場合をエージェントの買う状態、 -1 の場合を売る状態と考える。エージェントは周りのエージェントの状態によって確率的に自分の状態を決める。まず、マジョリティ効果に対応する部分は通常のイジングモデルと同じで、最

近接エージェントの取る状態によって決まる。イジングモデルと違うのはマイノリティ効果に対応する部分である。市場全体の状態を測る量として磁化を導入する。磁化はスピン S_i をすべて足し合わせたものとして定義される。磁化が正の値であれば、買う状態が多く、逆に負の値であれば売る状態が多いことになる。また、磁化の絶対値が大きいときは、市場が過熱してバブル的になっていると考えられる。このようなバブル的な状態はいずれ弾けると考えると、将来のロスを守るためには過熱した状態（マジョリティ）とは逆の状態（マイノリティ）に移っていた方がよいことになる。そこで、マイノリティ効果では、磁化の絶対値が大きいときは、自分の状態を変える確率が高くなるようにする。

以上のことをまとめると、Bornholdt モデルでは以下の確率 p でスピンの状態をアップデートしていく[2]。

$$S_i(t+1) = +1, \quad p = 1/(1 + \exp(-2\beta h_i(t))) \quad (1)$$

$$S_i(t+1) = -1, \quad 1 - p \quad (2)$$

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^n J_{ij} S_j(t) - \alpha S_i(t) |M(t)| \quad (3)$$

ここで、 $M(t)$ は磁化を表し、

$$M(t) = \frac{1}{N} \sum_j S_j(t)$$

で定義される。 J_{ij} は周りのスピンとの相互作用の強さを表し、普通最近接のスピンのみ $J_{ij} = 1$ とし、その他はゼロとする。 β はオリジナルなイジングモデルでは温度の逆数に対応する。

β の値を相転移温度以下に設定することによって、スピンは揃おうとするが、(3) 式の第 2 項があるために、シミュレーションを行うと、order 相になったり disorder 相に変化したりと複雑な動きを見せる。

図 1 は $L = 100$ の 2 次元格子上でパラメータを $\beta = 2, \alpha = 20$ としてシミュレーションした時の磁化 $M(t)$ の時系列である。アップデートは周期的境界条件のもとで行った。

収益率は[3]に従って

$$R(t) = (M(t) - M(t-1))/2 \quad (4)$$

で定義する。図 2 は収益率の時系列である。収益率

には変動の大きい時期や小さい時期が続くボラティリティクラスタリングが現れている。

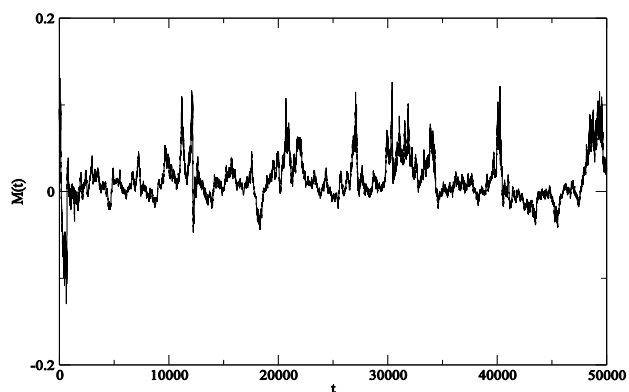


図 1 磁化 $M(t)$ の変動。

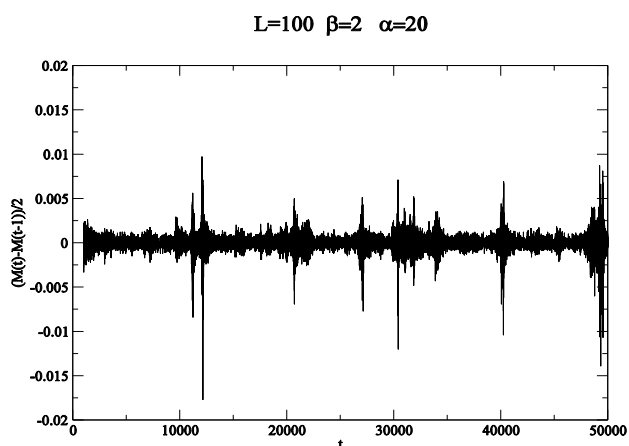


図 2 収益率 $R(t) = (M(t) - M(t-1))/2$ の変動。

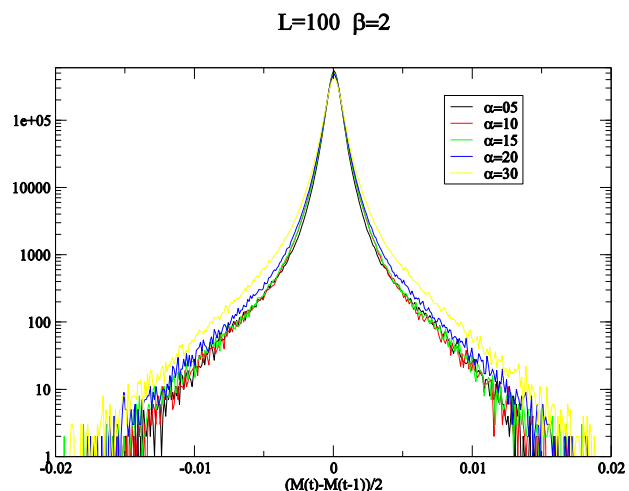


図 3 収益率分布。

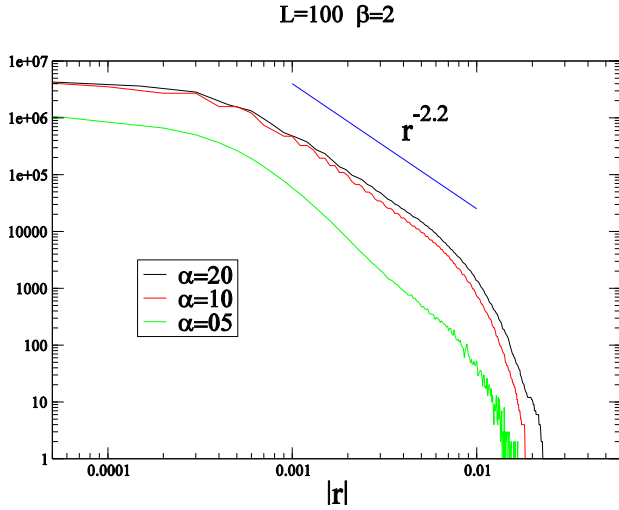


図4 収益率累積分布。

図3はパラメータ α を変えてシミュレーションを行い、その収益率分布を表示したものである。正規分布とは違い、裾野の厚い分布となっている。

図4は収益率の累積分布を表している。裾野に冪的な振る舞いが見られることが分かる。

3. Potts-like モデル

Bornholdt モデルでは、スピンの状態は買うか売るか2つの状態を取るが、複数の状態を考慮することも可能である。例えば、[4,5]では、買う、売る、何もしないの3つの状態を考えたモデルを提唱している。例えば、買う状態を+1、売る状態を-1、何もしない状態を0とすると、このモデルでは、以下の確率でスピンをアップデートする。

スピンが $S'_i = +1$ または -1 になる確率：

$$P(S_i \rightarrow S'_i) = \frac{\exp(\lambda(h(i, S'_i) - \mu S_i S'_i | M |))}{Z} \quad (5)$$

スピンが $S'_i = 0$ になる確率：

$$P(S_i \rightarrow S'_i) = \frac{\exp(\lambda(h(i, S'_i) - \mu(\varepsilon_i | M | - 2\gamma K))}{Z} \quad (6)$$

ここで、 $h(i, S'_i)$ は周りと同じ状態のスピンがいくつあるかをカウントするものに対応し

$$h(i, S'_i) = \sum_{\langle i, j \rangle} \delta_{S_j, S'_i} \quad (7)$$

で定義される。 $\langle i, j \rangle$ は*i*番目のスピンの周りのスピン*j*についての和を表す。 Z は全確率の和が1になるように規格化するもので、

$$\sum_{k=+1,-1,0} P(S_i \rightarrow k) = 1 \quad (8)$$

を満たすように決定される。 K は以下で定義される inactivity rate で、0になっているスピンの数を全格子数*N*で割ったものである。

$$K = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, 0} \quad (9)$$

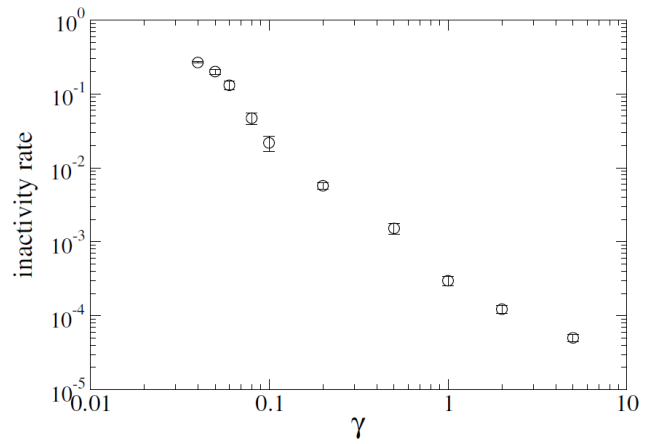


図5 Inactivity rate.

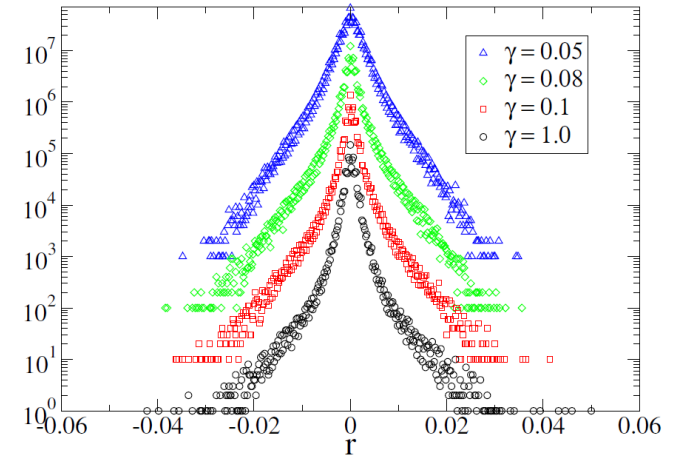


図6 収益率分布。

図5は γ の値を変えたときの*K*の値を表す。ここでは、2次元格子、 $L = 100$ 、 $\lambda = 2$ 、 $\mu = 10$ でシミュレーションを行った。

ミュレーションを行っている。 γ 値が小さいときはスピンの0を取る確率が高く、逆に大きいときは0を取る確率が小さくなっている。

図6は収益率分布を表している。 γ 値が大きいときは0をとるスピンの数が少なくなっているのでBornholdtモデルに近づくことになり、図3と同様の収益率分布になっている。一方、 γ 値が小さいときは、指数関数的な収益率分布になっている。冪的ではなく、指数関数的な収益率分布も実際の市場、特に発展途上国の市場で見られることがある[6]。

3. 複数時系列イジングモデル

これまでのシミュレーションでは1時系列のシミュレーションが行われているが、現実の市場はたくさんの株価が取り引きされ、それらの株価は相関を持って変動している。ここでは、複数の株価が相関を持って変動するモデルをBornholdtモデルの拡張によって構築する[7,8]。

今、 K 個の株価があるとす。 l 番目の株価に対して、(3) 式を以下のように変更する。

$$h_i^{(l)}(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j^{(l)}(t) - \alpha S_i^{(l)}(t) | M^{(l)}(t) | + \sum_{j=1}^K \gamma_{ji} M^{(j)}(t) \quad (10)$$

ここで、(10) 式の右辺3項目が他の株価との相関を磁化 $M(t)$ の値に応じて取り入れる項であり、 γ_{ji} が相関の強さを表すパラメータである。 l 番目のスピン $S_i^{(l)}(t)$ はBornholdtモデルと同様に以下の確率でアップデートしてゆく。

$$S_i^{(l)}(t+1) = +1, \quad p = 1/(1 + \exp(-2\beta h_i^{(l)}(t))) \quad (11)$$

$$S_i^{(l)}(t+1) = -1, \quad 1-p \quad (12)$$

3. シミュレーション

ここでは、3個の株価 ($K=3$) が相関を持って変動する場合の結果を紹介する。2次元の格子を用い

格子サイズは $L=120$ とし、パラメータは $\beta=2, \alpha=35, J_{ij}=1$ とした。相互作用のパラメータ γ は

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 & 0.1 \\ 0.05 & 0 & 0.15 \\ 0.1 & 0.15 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

とし、ここでは対称な相互作用を仮定した。相互作用は $\gamma_{12} < \gamma_{13} < \gamma_{23}$ となっており、これは株1と株2の間の相互作用が一番小さく、株2と株3の相互作用が一番大きくなるように設定されている。

シミュレーションは、逐次ランダムにスピンをアップデートして行き、始めの10,000サンプルはthermalizationとして捨てて、その後の500,000サンプルを解析に利用した。

図7は磁化の変化を表している。ここでは、データの一部(150,001番目のデータから180,000番目のデータ)のみを表示しある。株1と他のデータの間には似た変動はあまり見られないが、株2と株3の間には似た変動が見られる。

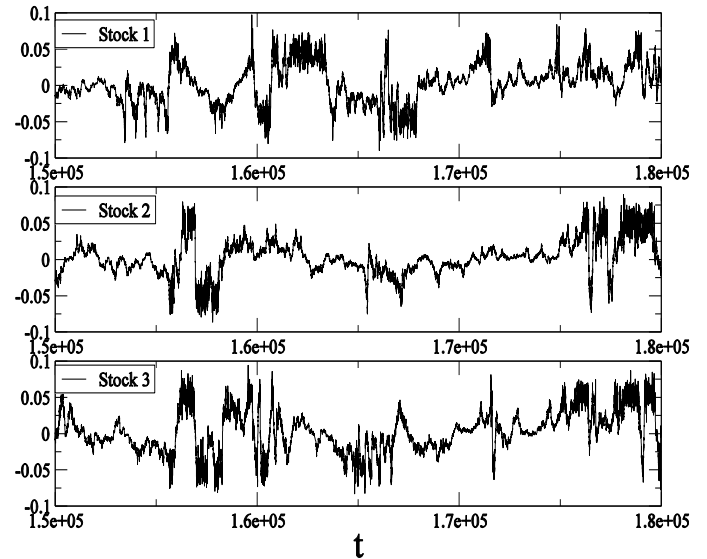


図7 複数時系列イジングモデルにおける磁化の変動。

図8は収益率の変動を表している。収益率の定義は(4)と同じである。ここでも、株価2と株価3の間には同時期に似た変動が多くみられる。

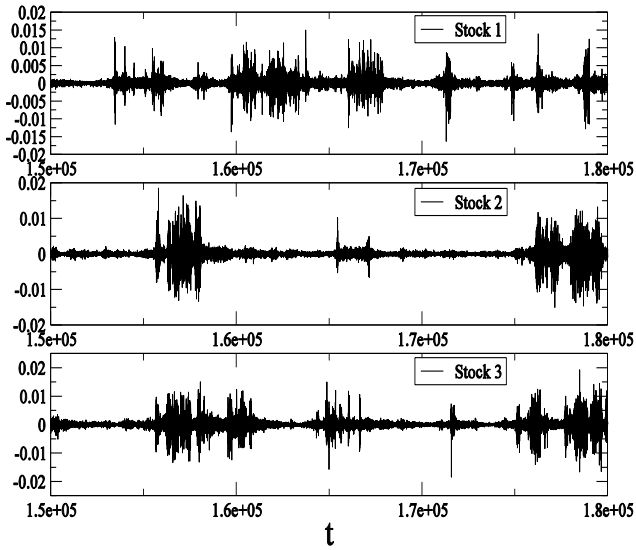


図8 複数時系列イジングモデルにおける収益率の変動。

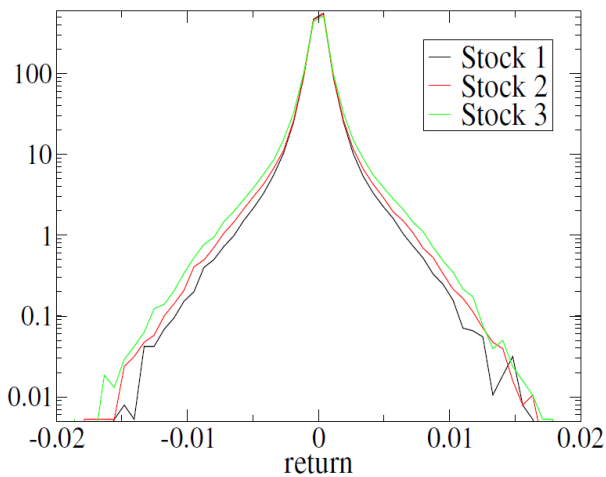


図9 複数時系列イジングモデルにおける収益率分布。

図9は収益率分布を表しており、Bornholdtモデルと同様に裾野の厚い分布となっている。

表1 ボラティリティ（株価収益率の絶対値）間の相関係数。

	Stock1	Stock2	Stock3
Stock1	1	9.91×10^{-2}	0.133
Stock2	9.91×10^{-2}	1	0.212
Stock3	0.133	0.212	2

表1は株価のボラティリティ間の相関を求めたものである。ここでは、ボラティリティとして株価収益率の絶対値を利用している。表1から、株1と2の間の相関は小さいが、株2と3の相関は大きくな

っていることが分かる。これは、(13)のように相互作用のパラメータ γ を設定したことに整合している。

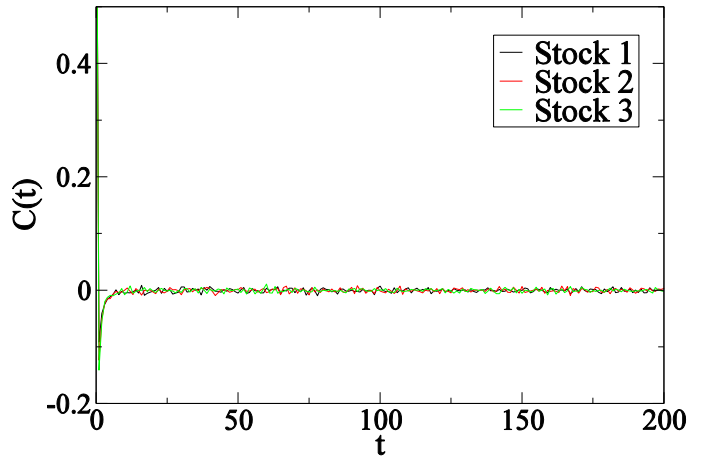


図10 収益率の自己相関関数。

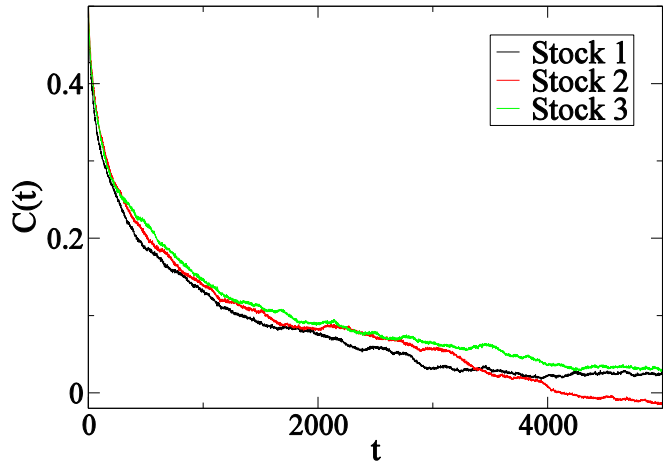


図11 絶対値収益率の自己相関関数。

図10は収益率の自己相関関数を表しており、自己相関は非常に短期でほぼゼロとなっている。一方、図11は絶対値収益率の自己相関関数であるが、長期の相関が見られる。これらの性質は実際の市場の株価収益率で見られる性質と一致している。

4. まとめ

本研究では、1時系列のモデルであるBornholdtモデルを拡張し、複数の相関のある時系列のモデルに拡張を行い、シミュレーションを行った。株価収益率の性質は元のBornholdtモデルと同様に、実際の市場の収益率の性質を反映したものとなった。また、絶対値収益率で代用したボラティリティ間に相関が現れるモデルとなった。

参考文献

- [1] R.Cont, Empirical properties of asset returns: stylizedfacts and statistical issues, *Quantitative Finance*, Vol. 1, (2001) pp. 223-236.
- [2] S.Bornholdt, Expectation Bubbles in a Spin Model of Markets: Intermittency from Frustration across Scales, *Int. J. Mod. Phys. C* 12 (2001) pp.667–674.
- [3] T.Kaizoji, S.Bornholdt and Y.Fujiwara, Dynamics of Price and Trading Volume in a Spin Model of Stock Markets with Heterogeneous Agents, *Physica A* 316 (2002) pp.441–452.
- [4] T.Takaishi, Simulations of Financial Markets in a Potts-like Model, *Int. J. Mod. Phys. C* 16 (2005) pp.1311–1317.
- [5] T.Takaishi, Analysis of Spin Financial Market by GARCH Model, *Journal of Physics: Conference Series* 454 (2013) 012041
- [6] K.Matia, M.Pal, H.Salunkay and H.E.Stanley Scale-dependent price fluctuations for the Indian stock market, *Europhys. Lett.* 66 (2004) 909–914.
- [7] T.Takaishi, Multiple Time Series Ising Model for Financial Market Simulations, *Journal of Physics: Conference Series* 574 (2015) 012149.
- [8] T.Takaishi, Some properties of multiple time series Ising model in financial market simulations, 2015 IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER), pp.104 – 108, DOI:10.1109/CYBER.2015.7287918