

ビットコイン価格時系列の統計的性質

Statistical properties of Bitcoin time series

高石哲弥

Tetsuya Takaishi

広島経済大学

Hiroshima University of Economics

Abstract: 本研究では、1分ごとのビットコイン価格データをもとに、その収益率時系列の統計的性質を調べた。収益率時系列の性質は他の金融時系列によく見られるファットテイル分布となっていることが分かった。ボラティリティの時間変動は GARCH 及び RGARCH モデルによって解析した。その結果、ボラティリティの持続性は大きく、またボラティリティプロセスの非対称性は小さいことが分かった。尖度は非常に大きい、時間スケールが大きくなるにしたがってゆっくりとガウス分布の値に近づくことが分かった。マルチフラクタル解析からは、一般化ハースト指数 $h(q)$ を決定した。一般化ハースト指数は q の値に依存し、マルチフラクタル性を持つことがわかった。更に、絶対値収益率のべき乗の自己相関を調べたところ、べき指数が約 0.4 のところで自己相関が最大となり、ビットコイン価格時系列にテイラー効果が存在することが分かった。

1. はじめに

ビットコインはサトシ・ナカモトという人物によって 2008 年に投稿された論文[1]に基づき考案された仮想通貨である。2009 年にはビットコインのソフトウェアである Bitcoin Core が配布され、ブロックチェーンの最初のブロックである genesis block の生成を経て、ビットコインの運用が開始された。その後、Mt.Gox の破綻等の出来事が発生したが、ビットコインのネットワークそのものは堅牢で完全な停止に陥ったことはない。ビットコインのネットワークはピアツーピアで構成され、中央集権の機関によらずオンライン決済が実行される。取引履歴はブロックチェーンと呼ばれる公開台帳に記録されてゆく。このビットコインの中核技術であるブロックチェーンは、仮想通貨以外の金融インフラの技術として注目を集め、FinTech における基幹技術として発展を続けている。

ビットコインは 2017 年 12 月に 1 BTC あたり 200 万円を超えるまで高騰したが現在 (10 月 1 日) は約 75 万円である。それでも、多くの仮想通貨が存在する中で、時価総額は 1 位であり、13 兆円を超える。この注目を集めるビットコイン価格は様々な側面から学術的な研究もされてきている (例えば、[2])。

本研究では、ビットコイン価格に注目し、その収

益率時系列の統計的性質を調べる。また、GARCH モデルによってボラティリティの時間変動の解析やマルチフラクタル解析[3]による時系列の長期記憶性、テイラー効果[4]についても研究を行う。

2. ビットコイン価格

本研究では、Bitcoin Price Index[5]の 1 分毎の価格データを利用し解析を行った。Bitcoin Price Index は 2013 年 9 月より作成が始まったインデックスで、世界のビットコイン取引所のうち CoinDesk の提示する条件 (国際的な取引サービス、最低取引サイズが 1500 USD 以下など) にあった取引所の価格の単純平均で作成されている。本研究では、2014 年 1 月 1 日から 2017 年 12 月 31 日までの 1 分毎の価格データを利用した。価格を $P(t)$ とする

と、収益率は $R_{\Delta t}(t) = \ln P(t) - \ln P(t - \Delta t)$ で表される。ここで、 Δt はサンプリング周波数である。図 1 は 1 分ごと、つまり $\Delta t = 1 - \text{min}$ の収益率の分布である。非常に裾野の厚いファットテイル分布となっている。

図 2 は様々なサンプリング周波数 Δt での収益率の尖度を表している。横軸がサンプリング周波数 Δt にあたる。 $\Delta t = 1$ では、尖度は 1000 に近いが、 Δ

t が大きくなると尖度はゆっくりと小さくなっている。 Δt が約 20,000min つまり約 2 週間で尖度は 3 に近づいている。このことから、ビットコイン収益率は時間スケールが大きくなると正規分布の尖度である 3 に近づいていくが、その近づき方は非常に遅いことがわかる。

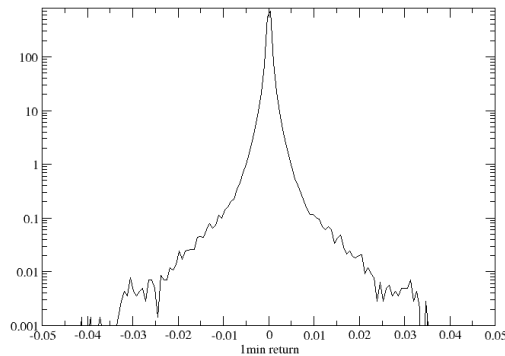


図 1 ビットコイン収益率分布

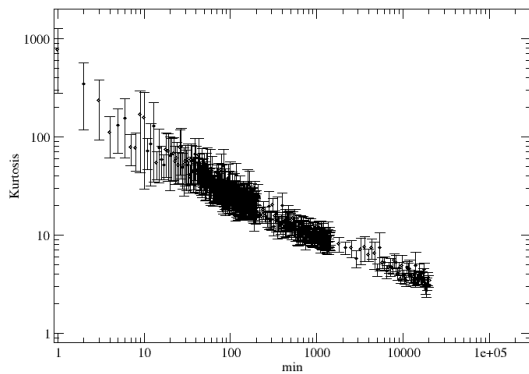


図 2 ビットコイン収益率の尖度

図 3 はビットコイン収益率の歪度をサンプリング周波数 Δt の関数で表している。 Δt が小さいところでは歪度は負となっている。 Δt が大きくなるとゼロに近づいている。ゼロへの近づき方は尖度と同様にゆっくりとしており、 Δt が約 10000-min(1 週間)で歪度はゼロとなっている。

図 4 は収益率の自己相関関数を表している。自己相関は 5 分程度で無くなっていることがわかる。一方、図 5 は絶対値収益率の自己相関関数のグラフで、自己相関はゆっくりと減少しており、長期記憶性を表している。絶対値収益率の d 乗に対して自己相関を調べた結果は 5 章のテイラー効果の所で詳しく述べる。

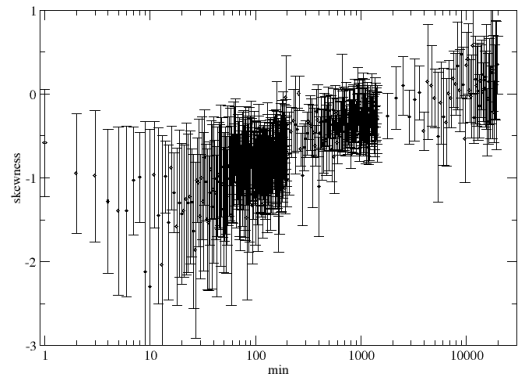


図 3 ビットコイン収益率の歪度

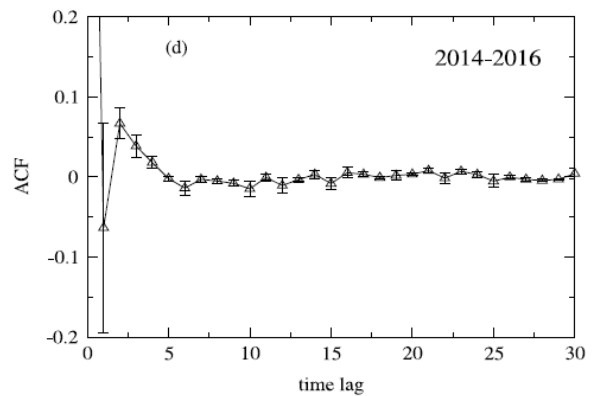


図 4 収益率の自己相関関数[6]

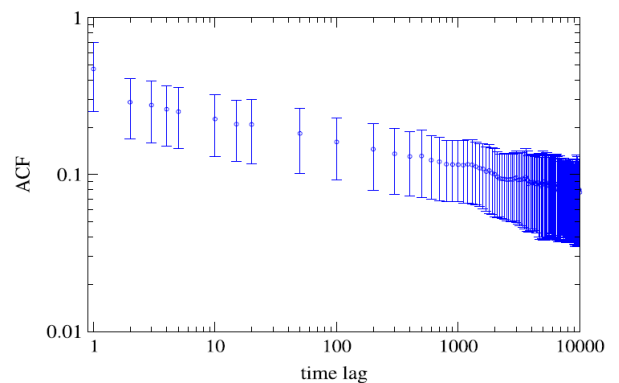


図 5 絶対値収益率の自己相関関数[6]

3. GARCH モデルによる解析

本研究では、ビットコイン価格の日次収益率に対して、GARCH 型モデルを使いボラティリティの持続性を調べた。ここでは、GARCH モデル[7]とボラティリティに非対称性を取り入れた RGARCH モ

デル[8,9]を利用した。これらのモデルでは、収益率 $r_t = \sigma_t \varepsilon_t$ として表したとき、ボラティリティプロセスが以下のように表される。

- GARCH モデル

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

- RGARCH モデル

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega + \alpha r_t^2 + \beta \sigma_{t-1}^2}{1 + \delta r_{t-1}}$$

ここで、 $\alpha, \beta, \omega, \delta$ はモデルパラメータである。

また、 ε_t は $N(0,1)$ に従う正規乱数を仮定した。 r_t は日次収益率であるが、 $100 \times R_{1440}(t)$ で定義したデータを利用した。

図6の一番上の図は日次収益率の時間変動を表しており、ボラティリティクラスターが現れていることが分かる。表1は日次収益率データから求めたモデルのパラメータである。パラメータ推定にはベイズ推定を用いた[10-13]。RGARCHモデルのパラメータ δ はボラティリティの非対称性を導入するパラメータであるが、非常に小さい値となっている。その為、GARCHモデルとRGARCHモデルで大きな違いはなく、 α, β, ω の値も似た値になっている。また、 $\alpha + \beta$ の値は、1に近く、ボラティリティの持続性が高いことを示している。図6の下部2つの図は推定されたGARCHとRGARCHモデルによって推定された σ_t^2 を図示したものである

が、ほとんど違いは見取れない。これらのことから、ビットコインの日次収益率変動は株価等のボラティリティと同様にボラティリティの持続性が高い一方で、ボラティリティ非対称性は小さいと考えられる。

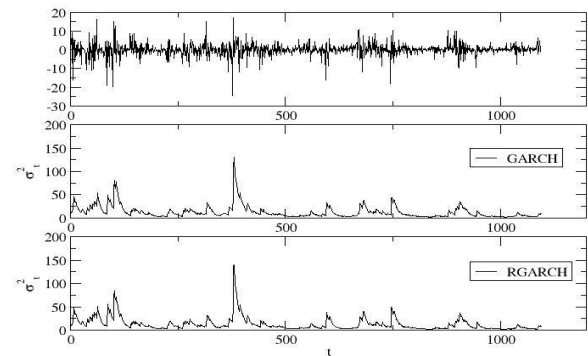


図6 収益率時系列と推定されたボラティリティ時系列

表1：推定されたモデルパラメータ。括弧の中は標準偏差を表している。

	GARCH	RGARCH
α	0.114(18)	0.116(19)
β	0.878(19)	0.875(20)
ω	0.239(78)	0.249(80)
δ	----	0.0053(47)
AIC	5539.50	5541.55
DIC	5535.68	5536.73

4. マルチフラクタル解析

本研究では、Kantelhardtらによる Multifractal detrended fluctuation analysis (MFDFA)の方法[13]によってマルチフラクタル解析を実行し、一般化ハースト指数を求めた。MFDFA法は以下の手続きから成る。

- ① オリジナルの時系列 $\{x_t, t=1, \dots, N\}$ から次の

プロフィール $y(k)$ を作成する。

$$y(k) = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}) \quad (1)$$

ここで、 \bar{x} は時系列 x_t の平均値である。

- ② プロファイル $y(k)$ を長さ s の $N_s = N/s$ 個

のセグメントに分け、セグメント内でトレンドを除去したデータの分散を求める。具体的には

以下の、 ν 番目のセグメント、 $\nu = 1, \dots, N_s$ に

対して $F^2(s, \nu)$ を計算する。

$$F^2(s, \nu) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (y[(\nu-1)s + i] - p_\nu(i))^2 \quad (2)$$

(2) 式中の $p_\nu(i)$ はトレンドを除去するための関数で、本研究ではセグメント内のデータを 3 次関数でフィットした関数を利用した。また、 N は s の倍数とは限らないので、その場合、最後の端数のデータが残ってしまう。これらのデータも利用するために、最後のデータから順番に並べ、上記の手続きを繰り返す。具体的には、 $\nu = N_s + 1, \dots, 2N_s$ に対して、以下を計算する。

$$F^2(s, \nu) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (y[N - (\nu - N_s)s + i] - p_\nu(i))^2$$

(3)

③ 計算した分散を利用して q 次の揺らぎ関数を以下のように定義する。

$$F_q(s) = \left(\frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(s, \nu)]^{q/2} \right)^{1/q} \quad (4)$$

もし、時系列が長期のべき的相関を持つなら、(4) 式は以下のように振る舞うことが期待される。

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (5)$$

ここで、 $h(q)$ は一般化ハースト指数とよばれるものである。 $q = 2$ のとき、上記の手続きは、Detrended fluctuation analysis[14]と同一となり、 $h(2)$ はハースト係数に一致する。時系列 $h(q)$ が q に依存するとき、マルチフラクタル性を持つ。ガウス時系列の場合、 $h(q)$ は $h(2)$ の場合と変わらず、マルチフラクタル性は現れない。

④ (5) 式の振る舞いから一般化ハースト指数 $h(q)$ を求める。

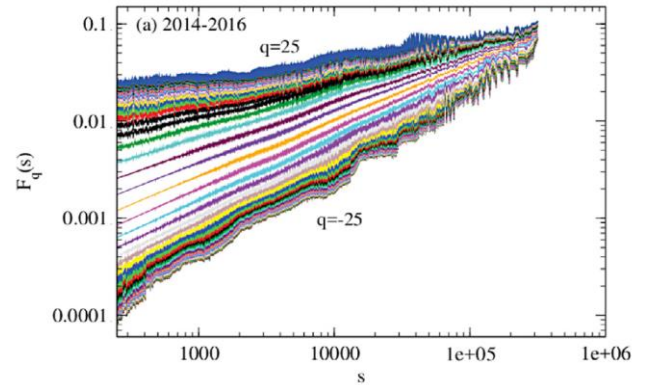


図7 揺らぎ関数 $F_q(s) \sim s^{h(q)}$ [6]

図7は2014年～2016年までのデータを利用して揺らぎ関数(4)式をもとめ、両対数でプロットした図である。 $q = -25 \sim 25$ までの様々な q において揺らぎ関数を計算している。傾きは q に依存していることから、マルチフラクタル性があることになる。

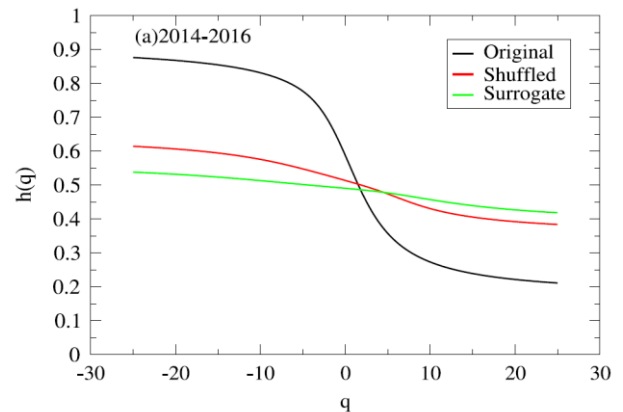


図8 一般化ハースト指数 $h(q)$ [6]

図8は図7の結果からも求めた一般化ハースト指数 $h(q)$ を図示したものである(Original)。 q が負の領域で0.5より大きな値を取り、正の領域では0.5よりも小さい。ハースト指数を求めると $h(2) = 0.475$ とガウス時系列の0.5に近い値になったが、 $h(q)$ が q に大きく依存し、ビットコイン時系列はガウス時系列の性質だけでは表されないことがわかる。また、 q が負の領域では0.5よりも大きく、 q が負の時系列で見ると長期記憶性があることが分かった。図8中の(Shuffled)は、時系列をランダムにシャッフルし、時系列相関を取り除いた時系列から $h(q)$ を求めた

ものである。この時系列には、ファットテイル分布の性質が残っているが、 $h(q)$ の変動は小さくなっており、マルチフラクタル性はファットテイル性よりも時系列相関の影響によることが大きいと思われる。(Surrogate)は線形の相関のみを維持した時系列の場合であるが、この場合も $h(q)$ の変動は小さくなっており、線形相関以外の影響がマルチフラクタル性に関わっていると思われる。

5. テイラー効果

Taylor[4]は40個の様々な金融資産について、収益率の2乗と収益率の絶対値の自己相関を比較した。そして、それらの値が有意に正の値を取っており、また多くのケースで収益率の絶対値の自己相関の方が収益率の2乗のものよりも大きくなることを発見した。その後、Dingら[15]は、S&P500 Indexの収益率を使い、収益率の絶対値のべき乗について自己相関を調べた。その結果、S&P500 Indexの収益率はべき指数が約1の時に自己相関が最大になると結論付けた。このような収益率の絶対値の自己相関が収益率の2乗のものよりも大きくなることをGrangerとDing[16]はテイラー効果(Taylor effect)と呼んだ。その後の実証研究から、収益率のべき指数が1以外の場合に自己相関が最大になる例も発見された。例えば、DingとGranger[17]は、株価収益率の場合はべき指数が1の時に自己相関が最大になるが、為替収益率の場合は1/4の時に最大となることを発見した。一方、Dacorognaら[18]はUSD-DEMとUSD-FRFペアの収益率に対しては、べき指数が1/2の時に最大となることを発見した。このテイラー効果についてビットコイン時系列を用いて研究を行った。尚、このテイラー効果の研究は首都大学東京の足立高德氏との共同研究である[19]。

以下で定義される自己相関関数を絶対値収益率のd乗に対して計算をし、テイラー効果を調べる。

$$\rho_d(\tau) = \frac{\frac{1}{N} \sum_t (|r(t+\tau)|^d - \langle |r|^d \rangle) (|r(t)|^d - \langle |r|^d \rangle)}{\sigma_{|r|^d}^2} \quad (7)$$

ここで、 $\sigma_{|r|^d}^2$ は $|r|^d$ の分散、 τ はタイムラグである。

また、 $\langle * \rangle$ は*の平均を表している。

図9はd=1と2の場合の自己相関関数を図示しており、収益率の2乗よりも絶対値収益率の自己相関の方が大きい結果となっており、テイラー効果が存在していることになる。

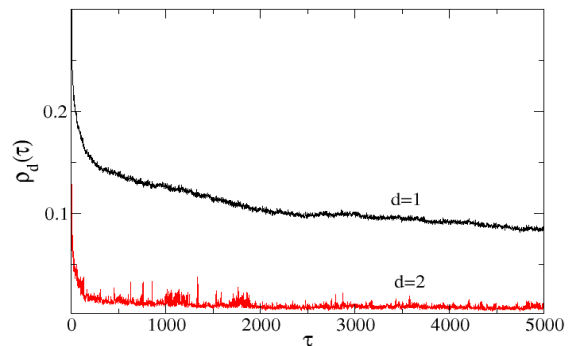


図9 ビットコインの $\rho_1(\tau)$ と $\rho_2(\tau)$ [19]。ラグ τ の単位は分である。

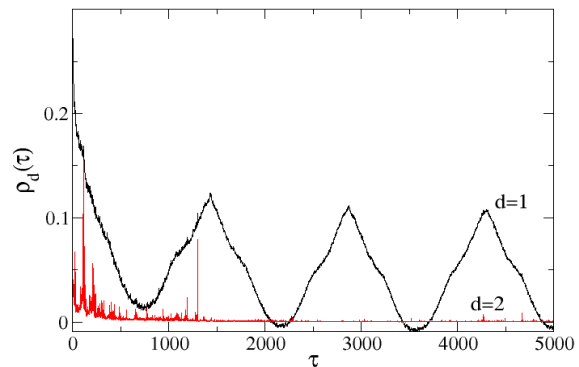


図10 ビットコインの $\rho_1(\tau)$ と $\rho_2(\tau)$ [19]。

本研究では、比較のため為替レート収益率についても解析を行った。図10はEUR-GBPペアの自己相関関数を表している。為替レートの場合は日次の周期性が現れている。但し、べき指数dを大きくすると周期性は小さくなり、d=2ではほとんど見られなくなった。

図11は様々なべき指数において自己相関計算 d_{max} はし、ラグごとに自己相関を最大にするべき指数を求めた結果を表している。図10の最上部の図はビットコイン時系列における自己相関を最大化するべき指数をラグの関数で表したものである。ラグ $\tau=1$ 分で d_{max} は約0.5であり、ラグが大きくなると徐々に小さくなっている。一方、図11の下部3つのグラフは3種類ペアの為替レートについて d_{max} を求めたものであるが、図10と同様に d_{max} にも日次の周期性が現れている。

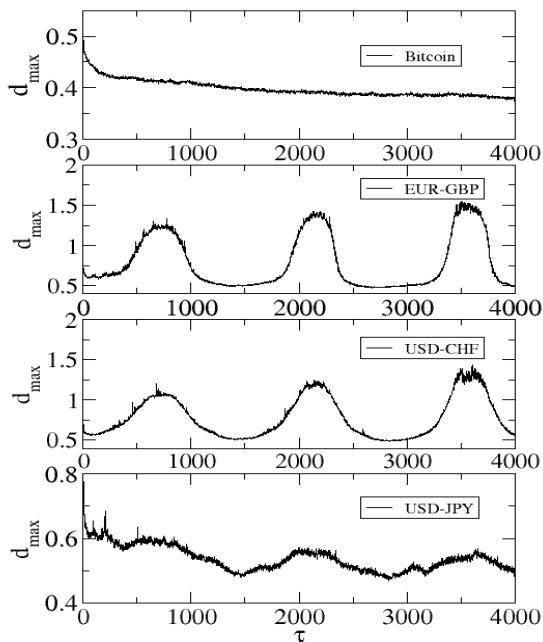


図 11 自己相関を最大にするべき指数 d_{\max} [19]。横軸はラグ τ (分) を表している。

6. まとめ

本研究では、1 分毎のビットコイン価格データを解析した。収益率分布はファットテイルとなっており、尖度は高い値となっている。また、収益率の自己相関は短期であるが、絶対値収益率の自己相関は長期である。GARCH タイプモデルの解析からは、ボラティリティクラスターリングがあり、ボラティリティの持続性が高いことが分かった。これらの性質は、他の金融資産価格に共通に見られる Stylized facts の性質と一致する。その他の性質として、ビットコイン価格時系列はマルチフラクタル性やテ일러効果を持つことが分かった。

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP12345678 の助成による。

参考文献

[1] N. Satoshi, Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system, [https:// bitcoin.org/bitcoin.pdf](https://bitcoin.org/bitcoin.pdf), (2008)
 [2] A.F. Bariviera, M.J. Basgall, W. Hasperué, M. Naiouf, Some stylized facts of the bitcoin market, *Physica A* 484 (2017) 82–90.

[3] J.W.Kantelhardt et al., Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series, *Physica A* 316, 87–114, (2002).
 [4] S. J. Taylor, *Modelling financial time series*, John Wiley & New jersey, 1986.
 [5] CoinDesk, <http://www.coindesk.com/>
 [6] T. Takaishi, Statistical properties and multifractality of bitcoin, *Physica A* 506 507–519, (2018)
 [7] T. Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307–327, (1986)
 [8] T. Takaishi, Rational GARCH model: An empirical test for stock returns, *Physica A*, 473, 451–460 (2017).
 [9] T.Takaishi, Volatility estimation using a rational GARCH model, *Quantitative Finance and Economics*, 2(1), 127–136, (2018)
 [1 0] T. Takaishi, An adaptive Markov chain Monte Carlo method for GARCH model, *Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering. Complex Sciences* 5, 1424–1434, (2009)
 [1 1] T. Takaishi, Bayesian estimation of GARCH model with an adaptive proposal density, *New Advances in Intelligent Decision Technologies, Studies in Computational Intelligence* 199, 635–643, (2009)
 [1 2] T. Takaishi, Bayesian inference on QGARCH model using the adaptive construction scheme, *Proceedings of 8th IEEE/ACIS International Conference on Computer and Information Science* 525–529, (2009)
 [1 3] T. Takaishi, Bayesian inference with an adaptive proposal density for GARCH models, *Journal of Physics: Conference Series, Vol. 221*, 012011, (2010)
 [1 4] C.K. Peng, et al., Mosaic organization of DNA nucleotides, *Phys. Rev. E* 49, 1685, (1994)
 [1 5] Z. Ding, C. W. Granger, R. F. Engle, A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of empirical finance* 1 (1), 83–106, (1993)
 [1 6] C. W. J. Granger, Z. Ding, Some properties of absolute return: An alternative measure of risk, *Annales d’Economie et de Statistique* 67–91, (1995)
 [1 7] Z. Ding, C. W. Granger, Modeling volatility persistence of speculative returns: a new approach, *Journal of econometrics* 73 (1), 185–215, (1996)
 [1 8] M. Dacorogna, R. Gencay, U. Müller, O. Pictet, R. Olsen, *An introduction to high-frequency finance*, Academic Press, 2001.
 [1 9] T.Takaishi, T.Adachi, Taylor effect in Bitcoin time series, *Economics Letters* 172, 5–7, (2018)